

「物性なんでも Q&A」 第 3 回

金属の光学的性質(2)

佐藤勝昭 東京農工大学／科学技術振興機構

このコーナーでは、小生のホームページの物性何でも Q&A に寄せられた質問と回答の中から、結晶工学関係者にご関心のありそうなものをピックアップしてご紹介しています。ここでは第 3 回として、第 2 回「金属の光学的性質に関する質問」のうち、前回ご紹介できなかった質問をご紹介します。一部については、やりとりを省略しています。

分類	番号	質問内容	所属
種々の金属の反射率	194	アルミニウムの反射率	企業
	202	アルミの UV 反射率	院生
	401	金属と合金の反射	企業
光吸収と熱	648	高反射率の金属が太陽光を吸収して熱くなる訳	企業
表皮効果	404	表皮効果と金属の反射	企業

#194 アルミニウムの反射率

Date: Wed, 7 May 2003 18:39:02 +0900

Q1: 毎々お世話になっております、F 社の W と申します(非公開でお願い致します)。

HP 拝見させていただき、金属反射を大変参考にさせて頂きました。私は、金属反射膜の研究を始めるにあたり、情報収集中に先生の HP にたどり着きました。初心者のな質問で申し訳ありませんがご教授願えれば幸いです。

HP を拝見させて頂き個人的な理解としまして、金属反射の材料による違いは、物質ごとに①バンド構造、②電子の質量、③フェルミ面での電子の密度、④誘電率が異なるからである。⇒自由電子が関与している。また、ドルーデの式より、キャリア数が多く、導電率が大きいほど反射率が高い傾向にあり、ある周波数でその反射は遮断されると理解しましたが、Al の反射率が全く落ちていない(遮断されていない)のは、ある周波数が存在しないのでしょうか？また、その周波数等の文献をお持ちであれば是非拝見させていただきたいのですが。

以上宜しくお願い致します。

Date: Wed, 7 May 2003 21:38:11 +0900

A1: W様、佐藤勝昭です。メールありがとうございます。

金属の反射についてのご質問ですが、基本的には、貴方の認識のように自由電子のプラズマ振動による Drude の法則でよいのですが、実際の金属では、自由電子による誘電率への寄与(負の誘電率)の他にバンド間遷移による吸収端付近での誘電率の分散の寄与が重畳しております。Drude だけなら、プラズマ周波数は 9eV 付近に来ますが、Au では 2.2eV 付近、Cu では 2eV 付近、Ag では 3eV 付近でバンド間遷移が始まり、その結果、見かけのプラズマ周波数が低いエネルギーに来るのです。Pines はこれを **hybrid plasma** と呼んでいます。(David Pines: Elementary Excitation in Solids, Perseus Books, 1966. pp.207-228)

Al の反射率は 1.5eV(800nm)付近に dip があり 86%程度に落ちています。私は、このエネルギー付近でバンド間遷移が始まっていると思っていますが、その遷移強度は d 電子の関与する Cu, Ag, Au に比べて弱いので、誘電率は負で、Drude 則で決まる本来のプラズマ周波数 8eV 付近まで 0 を横切ることなく、この結果、反射率が高エネルギーまで伸びているのだと思います。しかし、1.5eV 以上ではバンド間遷移が関与していることは確かでしょう。文献としては、Landolt-Bornstein New Ser. 15-IIIb がお奨めです。

Date: Mon, 12 May 2003 08:49:29 +0900

Q2: お世話になります、W です。

早急なご回答有難うございました。d 電子がそれほど大きく関与しているとは驚きです。また、先生お薦めのランドルトベルンシュタインの本が見つかることができませんでした。お手元に所有しておられましたら是非拝見させて頂きたいのですが如何でしょうか。

Date: Mon, 12 May 2003 12:20:11 +0900

A2: W 様、佐藤勝昭です。本は農工大の図書館にあります。お越しになってご覧下さい。

## #202 アルミニウムの UV 反射率

Date: Wed, 28 May 2003 17:37:24 +0900

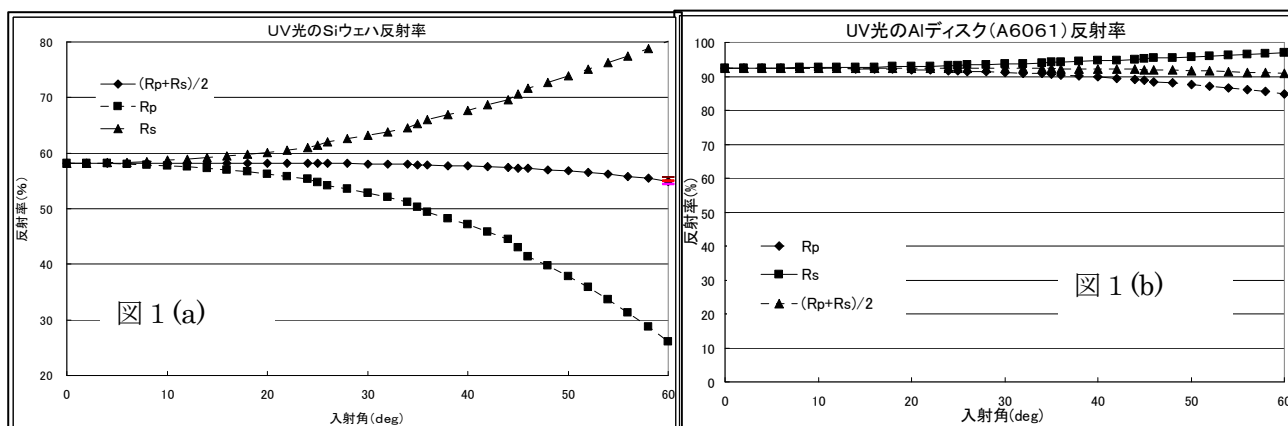
Q1: 佐藤勝昭先生、C 大学M1の U といいます。

以前、Si ウェハと UV 光との関連について質問させていただきました。今回、新たに疑問に思うところがあり、2つばかり質問させていただきます。

その後、Si ウェハの反射率測定実験を行い、先生に教えていただいた理論値との比較を行いました。

測定方法は、UV 反射光の入射角(反射角)毎に得た強度データ( $\text{mW}/\text{cm}^2$ )を、直接光強度データ( $\text{mW}/\text{cm}^2$ )で割り、反射率を算出しました。UV 光源は HOYA-SCHOTT 製の UV 照射装置「EXECURE3000」で、水銀キセノンランプから放射された UV 光は、光ファイバーライトガイド、UV 集光レンズを通して照射されます。UV 光の強度測定はウシオ電機製の紫外線積算光量計「UIT-150」です。光学系は全てシグマ光機製の製品を用いています。

実験装置の構成上、入射角(反射角)が  $20\text{deg}$  以下の測定ができなかったため、 $25\text{deg} \sim 60\text{deg}$  の範囲で得られたデータを用いて外挿を行い、 $0\text{deg}$  での反射率を予測しました。測定結果を図 1(a)「Si 反射ウェハ反射率」に示します。グラフを見ると、S 偏光成分と P 偏光成分の算術平均とよく一致することが分かりました。



一つ目の質問です。この実験によって得られた反射率を理論的にどのように捕らえたいのでしょうか？

単純に、UV 光は S 偏光成分と P 偏光成分がランダムに照射されているから、理論反射率の S 偏光成分と P 偏光成分の算術平均とよく一致すると考えても見たのですが・・・今ひとつ分かりません。

Si ウェハのほかにも、Al 合金 (A6061) の反射率測定を行いました。この試料の表面は鏡面仕上げになっていますが、加工跡が筋状についていました。この試料を使った測定結果を、以前教えていただいた「Handbook of Optical Constants of Solids」に出ている Al の反射率のデータを excel に入力し、計算しました。図 1(b) のように、Al の理論値反射率に対し、測定した値が相当大きく下回っており、グラフのプロファイルも全く違っていることが分かりました。

二つ目の質問です。この結果をどのように捕らえたいのでしょうか？用いた試料の表面の影響がここまで大きく効いてくるものなのでしょうか？また、純 Al の理論値と、Al 合金の実験値を比較すること自体が良くないのでしょうか。合金といっても Al が主成分なので特に問題ないとは思ったのですが・・・

いつもくだらない質問と要求ばかりですみません。よろしくお願ひします。

Date: Wed, 28 May 2003 20:09:20 +0900

A1: U 様、佐藤勝昭です。

メールありがとうございます。実験条件および解析条件について疑問がありますので教えて下さい。

- (1) HOYA-SCHOTT 製の UV 照射装置「EXECURE3000」のカタログによれば、光源のスペクトルは波長の異なる多数の輝線スペクトルから成り立っています。また、紫外線積算光量計 UIT-150 については、検出器に 254,365,405 の 3 波長タイプがあり、どれを使ったかによっても違ってきますが、どの波長で測定されたのでしょうか。反射率は波長によって異なります。
- (2) 偏光子・検光子として何を用いたのでしょうか。少なくとも、写真には、偏光子・検光子のかげも形もありません。ということは非偏光のデータだと言うことですね。それなら、理論的に導いた  $R_s$ ,  $R_p$  の平均値となってよいと思います。
- (3) Al の酸化を考慮されたでしょうか。

一般に Al は低真空の場合蒸着中から酸化が始まります。従って、Al は表面が酸化していて  $\text{Al}_2\text{O}_3$  になっているとして扱わなければなりません。厚みは数  $\text{\AA}$  から数十  $\text{\AA}$  のオーダーでしょう。測っているのは Al の反射率ではなく、 $\text{Al}_2\text{O}_3$  を介して Al の反射率を測っていることとなります。紫外線領域では特に深刻です。以下では、荒っぽい見積もりで、反射率低下を説明します。 $\text{Al}_2\text{O}_3$  の膜厚がわからないので、空気/ $\text{Al}_2\text{O}_3$ /Al の構造で、干渉を考えないとすると、空気と  $\text{Al}_2\text{O}_3$  の界面の透過、 $\text{Al}_2\text{O}_3$  と Al の界面の反射、 $\text{Al}_2\text{O}_3$  と空気の界面の透過を考えることとなります。

今、波長がわからないので、310nm=4eVとします。4eVにおいてAlの $n=0.268$ 、 $\kappa=3.41$ 、 $Al_2O_3$ の $n_0=1.81$ です。空気と $Al_2O_3$ の界面の直入射の反射率 $R_1$ は $R_1=(n_0-1)^2/(n_0+1)^2=0.083$ 、従ってこの界面の透過率 $T_1$ は $T_1=1-R_1=0.916$ となります。一方、 $Al_2O_3$ とAlの界面の直入射反射率 $R_2$ は $R_2=\{(n-n_0)^2+\kappa^2\}/\{(n+n_0)^2+\kappa^2\}=0.878$ 。従ってこの系の直入射反射率 $R$ は、 $R=T_1 \cdot R_2 \cdot T_1=0.916^2 \cdot 0.878=0.736$ 。すなわち、74%に低下してしまうのです。実際には干渉があるのでもっと反射率が低下すると考えられます。せつかく、実験をされるのであれば、条件をもう少し抑えておかれることをお奨めします。

---

Date: Wed, 28 May 2003 22:01:58 +0900

Q2: 佐藤勝昭先生、C大学大学院S研究科M1のUです。

先ほどは言葉足らずで申し訳ありませんでした。実験条件及び解析条件については

- (1) 紫外線積算光量計UIT-150は365nmを測定できるものを用いています。
- (2) 偏光子・検光子は用いずに実験を行いました。  
(先生に質問されて、偏光子・検光子の存在を始めて知りました。)実験データは非偏光のデータです。
- (3) Alの酸化膜については、何も考慮していません。

Al合金の反射率測定に用いた試料ですが、化学組成で、Al94.1~96.1%、Cu<0.4%、Si0.5~1.0%、Fe<0.4%、Mn<0.3%、Mg0.5~1.0%、Cr<0.3%、Pb+Sn1.5~2.5%です。

微量に添加されている元素が反射率に与える影響よりも、酸化膜が反射率に及ぼす影響のほうがはるかに大きく無視できないと考えてよろしいのでしょうか？酸化した表面の影響も考慮して、もう一度実験データを整理し直してみたいと思います。くだらない質問にとでも丁寧に解説していただきありがとうございます。

---

Date: Thu, 29 May 2003 00:35:10 +0900

A2: U様、佐藤勝昭です。

- (1) 波長365なら3.4eVですね。4eVとしての考察でもそれほど外れていないでしょう。
- (2)  $R_s$ 、 $R_p$ をきちんと出すには偏光子を使わなければなりません。せつかくの実験ですから、偏光子を使って見て下さい。ただし、フィルム偏光子は紫外線を吸収するのでお薦めできません。グラントムソン塔方解石を用いたプリズム偏光子を使って下さい。
- (3) Alは酸化しやすい金属です。真空中でも悪い真空なら表面は酸化物になります。Alの高エネルギー側の反射率をきちんと求めるためには、高真空中で作成してすぐに測るようにしなければなりません。
- (4) お使いになったアルミニウム合金はアルミサッシに使われるもので、耐食性にすぐれているとのこと。どの程度の酸化膜ができてはいるかはよくわかりません。

---

Date: Tue, 3 Jun 2003 21:35:10 +0900

AA: C大学S研究科M1のUです。連絡が遅くなり申し訳ございません。貴重なご助言ありがとうございました。これを参考に解析、実験をしてみたいと思います。今後また質問をする機会が多々あると思います。その際はまたよろしく願います。

---

## #401 金属と合金の反射

---

Date: Mon, 26 Jul 2004 18:00:50 +0900

Q: 佐藤勝昭先生、M\*社のW\*です。あつかましくも、2度目の質問をさせていただきます。前回のメールにて、先生より、「PalikのHandbook of Optical Constants in Solids」、「Landolt BoernsteinのニューシリーズのIII-15b」の2冊と、計算力があれば、反射率 $R$ は、 $R=\{(n-1)^2+\kappa^2\}/\{(n+1)^2+\kappa^2\}$ の式で全ての金属に関して、各波長毎の反射率を求めることができると考えてよいとの回答をいただきました。実は、漸く「PalikのHandbook of Optical Constants in Solids」をI~IIIまで借りることができ、中身を確認しているのですが、3点ほど教えていただけないでしょうか？

- 1) 探し方が悪いのかZnのデータがないようなのですが、この本では掲載されていないのでしょうか？
- 2) アルミのデータとして、1冊目の395~403頁に掲載があるのですが、この表では、 $n$ が2つ(以降左側から $n_1, n_2$ )、 $\kappa$ が2つ(以降左側から $\kappa_1, \kappa_2$ )そして $R$ が3つ(以降左側から $R_1, R_2, R_3$ )と $R_{iv}$ が掲載されています。上記の式にて、算出すると、 $n_1$ と $\kappa_1$ からは $R_1$ が算出され、 $n_2$ と $\kappa_2$ からは $R_3$ が算出されることが分かりました。これら、 $n_1, n_2, \kappa_1, \kappa_2, R_1, R_2, R_3, R_{iv}$ の意味を教えていただけないでしょうか？また、一般的に反射率というのは、どれを用いればいいのでしょうか？
- 3) 別のQ&Aの項目で、先生のご回答で、「お望みの波長範囲のデータがないときは、ローレンツモデルで外挿するとよいでしょう。」との記載があったのですが、このローレンツモデルでの外挿というのは、具体的にはどのように行うのでしょうか？

以上大変基本的な質問ばかりで恐縮ですが、宜しく願います。

---

Date: Mon, 26 Jul 2004 20:15:37 +0900

A: W様、佐藤勝昭です。

- 1) 亜鉛は酸化しやすいので、信頼性のあるデータが得にくいのでしょうか。可視データは、W.Meier:Ann.Phys.31, 1017 (1910)にのっているようです。工藤恵栄:分光学的性質を主とした基礎物性図表(共立、昭和47)p.10に再掲されています。また、近赤外データは、R.H.Graves and A.P. Lenham: J.Opt.Soc.Am. 58, 126 (1968) に載っているようで、前掲書に引用されています。(Meierのデータとつながっていません)
- 2)  $n_1, k_1$  は E.Shiles et al., Phys Rev. B22, 1612 (1980)、 $n_2, k_2$  は R.W. Ditchburn et al., Proc. R. Soc. London Sec A 294, 20 (1966)、 $R_{iv}$  は D.Y. Smith et al. Argonne National Lab. Report 1983 によるものです。 $R_{iv}$  は前掲書 p.379 の説明にありますように  $10^{-5} \sim 10^{-6}$  Torr の高真空中で蒸着法で作製され、その後空気にさらされた Al 薄膜のデータです。詳細は引用してある文献を読んで信頼性を判断してください。物質定数としては空気にさらさず in-situ で測定した値がよいのですが、実際に使う膜の場合の実測値は空気にさらした値の方が近いでしょう。
- 3) Lorentz model というのは、古典的な運動方程式に従って誘電率を求めたものです。手続は固体物理のどんな本にも書いてあります。拙著「光と磁気」(改訂版第2刷)[朝倉 2003]p62-66, 文章部分は下記の pdf をご覧ください。http://home.sato-gallery.com/HikaritoJikiChap4rev.pdf、あるいは、山田、佐藤ほか著「機能材料のための量子工学」[講談社 1995]第4章 p.160 を参照下さい。Lorentz の式においては、比誘電率の実数部、虚数部がそれぞれ下記の式で書けます。

$$\epsilon' = 1 - \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

$$\epsilon'' = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{\omega/\tau}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega/\tau)^2}$$

W 様をお願いします。すべて、基礎から全部をネットでお教える余裕がありませんので、基礎的な知識は書物をきちんと基礎から学ばれることをお勧めします。

Date: Tue, 27 Jul 2004 09:24:49 +0900

Q2: 佐藤先生

早速のご回答本当にありがとうございました。ご指摘の通り、基礎的な知識もなく、質問してしまい大変恐縮なんですが、恥のかきついでもう2点コメントいただけないでしょうか？

- 1) 金属の反射率データから、真鍮などの合金の反射率を成分比率から予測することはナンセンスでしょうか？  
例えば、真鍮の成分比として銅65%：亜鉛35%を考えた時、ある波長での銅の反射率を $R_c$ 、亜鉛の反射率を $R_z$ とすると、この波長での、真鍮の反射率は近似的に $(R_c \times 0.65 + R_z \times 0.35)$ とおくことはできないでしょうか？
- 2) 合金として、はんだを考えた場合、よく使われる、共晶はんだ(63%Sn, 37%Pb)では、温度上昇によって、固体→液体に変化し、表面状態も鏡面状態のようなものになりますが、そうした状態変化と反射率との関係はどのように考えるべきでしょうか？ やはり、データからの算出というものでは、対応不可能で実測が必要と考えるべきでしょうか？

以上宜しく願いいたします。

Date: Tue, 27 Jul 2004 13:55:06 +0900

A: W 様、佐藤勝昭です。

- 1) 反射率は物質固有の物理量ではなく、物質と光の相互作用の結果生じる光に対する影響を表しているに過ぎません。物質を特徴づけるのは誘電率です。非固溶系(相分離をする)合金では、全体の誘電率は構成元素の誘電率の平均と見ることができますから、合金比率を求めることができますでしょう。固溶系の場合は、合金を作ることによって電子構造(バンド構造)が変化するので、誘電率は決して平均にはなりません。真鍮の反射率を 近似的に $(R_c \times 0.65 + R_z \times 0.35)$ とおくことはできません。  
ただ経験的アプローチとして、比率のわかった合金を作っておき、それらのスペクトルを測定して、未知の合金のスペクトルをそれと比較することは可能でしょう。
- 2) 半田が溶けたときに鏡面状態になったのは、凹凸のあった固体表面が、液体表面になったためにフラットになったことによるもので、固体においても丁寧に研磨すると鏡面状態が得られます。従って、形状による反射率の変化が関わっているの、定量化はむずかしいでしょう。しかし、経験則として、特定の系において、温度とともに目で見て反射に変化があるのであれば、レーザを当てて反射率を測定し、それを温度に対してプロットしておき、反射率から温度を推定することには使えると思います。ただ、物質や、条件が特定された狭い範囲内での実用性はあると思います。

Date: Tue, 27 Jul 2004 18:01:01 +0900

AA:佐藤先生

大変お忙しい中、愚問にお答え下さり、本当にありがとうございました。

#648 高反射率の金属が太陽光を吸収して熱くなる訳

Date: Mon, 19 Sep 2005 14:02:20 +0900

Q: 東京農工大学 佐藤先生

L社のFと申します(匿名希望でお願いします)。HPを拝見しメールさせていただきました。私はプラスチックの成形加工を行っている会社の研究開発部門に所属している者です。光化学に関してはまったくの素人ですので、的外れな質問かもしれませんがご容赦ください。

先生のHPを拝見しますと、金属は、プラズマ周波数より長い波長では誘電率が負になるため光を吸収できず反射するので光って見えるとのことですので、たとえば太陽光線の波長域の可視光線から近赤外線(~2500nm)の光は高い率で反射するのであろうと考えました。光を反射するのであれば、光のエネルギーを吸収できないため金属は太陽光線が照射される環境に置かれても熱くならないのではと思いましたが、実際、公園などに設置されている金属製の滑り台などは、プラスチックや木、石などに比べて非常に熱く感じます。プラスチックの場合、色との関係もあると思いますが、白ではなく、青や赤に着色されているプラスチックでも、ステンレスのような金属より熱くないように思います。なぜ、金属はプラスチックや木、石などに比べて熱くなるのかお教えいただきたく、お願い申し上げます。

Date: Wed, 21 Sep 2005 01:59:32 +0900

A: F様、佐藤勝昭です。

赤外線を吸収するから熱くなるとは限りません。可視光線でも吸収すれば、そのエネルギーは、結局は格子振動を通じて熱になります。反射率が高いというのは、吸収係数が大きいからです。垂直入射反射率Rは屈折率n、消光係数 $\kappa$ とすると、

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}$$
と与えられます。

もし、吸収が強くて、 $\kappa > n$ としますと、 $R \rightarrow \kappa^2 / \kappa^2 = 1$ となり100%反射します。実際には、100%反射しないで可視光線に対して80%位の反射率になっているので、表皮部分で十分に吸収があり、発熱するのです。鉄は反射率が低く、十分吸収するのでかなり熱くなります。銅は、プラズマ周波数以上の光子エネルギー(2eV付近)に対し反射率が低いので、緑や青の光を十分吸収し熱くなります。銀は可視光に対し95%以上の反射率なので太陽光下で温まりにくいです。

Date: Wed, 21 Sep 2005 12:35:08 +0900

AA: 東京農工大学 佐藤先生

L社のFと申します。感覚的な内容の質問に対して、お忙しい中、丁寧なご回答を頂き、ありがとうございました。吸収率と温度は正の関係で相関することですので、実際に各種材料の可視光線から近赤外線の波長領域の吸収率と、これらに太陽光を照射した場合の表面温度との関係を測定してみたいと思います。吸収された光が熱に変わる効率や、放熱(比熱に関係するのかもしれませんが)が、材料によって違い、それが試験を行った時の材料の表面温度にどう影響するか分からない点もありますが、まずは、測定をしてみます。

この度は、愚問にご回答いただき、重ね重ね、お礼申し上げます。

#### #404 表皮効果と金属の反射

Date: Mon, 2 Aug 2004 18:37:28 +0900

Q1: 東京農工大工学部教授 佐藤勝昭 様

A社のKです。お世話になっております。先日はお忙しい中、質問にお答え頂き、ありがとうございました。度々申し訳ない限りですが、本日も御教授を頂けないでしょうか。質問366において、電界遮蔽の効果についての説明を拝見しました。ここで述べられていた「表皮効果」と「自由キャリアによる反射」は、どのような関係にあるのでしょうか。

金属がプラズマ周波数以下で負の誘電率をもち、それに起因して大きな反射率を示すことを、教科書や先生のHPから勉強させて頂きました。これが、自由キャリアによる反射だと認識しております。表皮効果は、電磁波が金属内を進んで行くにつれ、自由キャリアによる反射によってどのように減衰していくのかを表していると考えればよいのでしょうか。

一般に電磁波遮蔽効果は、表面抵抗率と関連づけられるかと思えます。自由キャリアによる反射率は導電率ではなくキャリア濃度に依存するため、一見するとややこの議論とずれている印象を受けます。しかし、自由キャリアによる反射が最表面で100%起こることはなく、遮蔽材トータルの遮蔽効果では厚みを考慮しなければならない。それが表皮効果であり、キャリア濃度だけでなくキャリア移動度も含めた導電率に依存することになる。このように考えればよいのでしょうか。

それとも、表皮効果は自由キャリア反射だけでなく、摩擦項である自由キャリア吸収、双極子分散なども含めた、トータルの電磁波の減衰を表しているのでしょうか。あるいは、表皮効果はあくまで吸収に関する指標であり、自由キャリア反射とは関係がないのでしょうか。先回に続き非常に基本的な事項なのかもしれませんが、御教授を頂ければ幸いです。大変御多忙とは存じますが、どうぞよろしくお願い致します。

-----Date: Wed, 4 Aug 2004 11:42:34 +0900

A1: K様、佐藤勝昭です。表皮効果は、純粋に電磁気学的に導出することが出来ます。マクスウェル方程式より

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

ここで、表皮効果を導くときには、「導体中には電束が存在しない」という仮定をしています。すなわち、 $\mathbf{D}=0$  となります。 $(\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$  から、 $\epsilon=0$  と考えるのです)すると(1)式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\sigma \mathbf{E} \quad (3)$$

となります。式(2)の rotation をとると

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}$$

右辺に式(3)を代入して

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

左辺は、 $\nabla \mathbf{E} = 0$  のもとでは、 $-\nabla^2 \mathbf{E}$  と書けますから、式(4)は

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

となります。

ここで、導体の中(z 方向)に向かって進む波を考え

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \exp(iKz) \quad (6)$$

とおくと、

$$-K^2 \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \sigma \mathbf{E} = 0 \quad (7)$$

となり、 $K$  の固有値として

$$K = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} \quad (8)$$

を得ます。 $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$  を使うと

$$K = \sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2} + i\sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2} \quad (9)$$

となるので、この  $K$  を式(6)に代入すると、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \exp(i\sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2} z) \exp(-\sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2} z) \quad (10)$$

が得られ、距離とともに振幅が  $\exp(-\sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2} z)$  の式にしたがって減衰することが導かれました。skin depth  $\delta$  は電界が  $1/e$  になる距離なので、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (11)$$

が導かれました。

それでは、光で考えるときはどうなるのでしょうか。

導体の光学定数として屈折率を  $n$ 、消光係数を  $\kappa$  で表しますと、導体内部における波動関数は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \exp(i\omega n z / c) \exp(-\omega \kappa z / c) \quad (12)$$

と表されます。

光学定数  $n, \kappa$  と誘電率の実数部  $\epsilon'$ 、虚数部  $\epsilon''$  の間には

$$\epsilon' = \epsilon_0 (n^2 - \kappa^2) \quad (13)$$

$$\epsilon'' = \epsilon_0 (2n\kappa) \quad (14)$$

の関係が成立します。表皮効果を導いたのと同じように導体内で電束(の実数部)が 0 としますと、 $\epsilon' = 0$  となりますから、(13)より、 $n = \kappa$  です。すると式(14)は

$$\epsilon'' = 2\epsilon_0 \kappa^2 \quad (15)$$

と書けます。逆に解いて、

$$\kappa = \sqrt{\epsilon'' / 2\epsilon_0} \quad (16)$$

誘電率  $\sigma$  とします。誘電率の虚数部  $\epsilon''$  との間には、 $\epsilon'' = \sigma / \omega$  の関係がありますから式(16)は

$$\kappa = \sqrt{\sigma / 2\omega \epsilon_0} = c\sqrt{\omega \mu_0 / 2\omega} \quad (17)$$

$\epsilon_0 \mu_0 = c^2$  の関係を使い、上に述べたように  $n = \kappa$  であることから、

$$n = \kappa = \sqrt{\sigma/2\omega\epsilon_0} = c\sqrt{\omega\mu_0/2\omega} \quad (18)$$

このようにして求められた屈折率と消光係数を式(12)に代入すると

$$E = E_0 \exp(-i\omega t) \exp(i\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2z}) \exp(-\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2z}) \quad (19)$$

となり、式(10)と同じ形が導かれました。

つまり、 $n = \kappa$  の条件の下では、光の電界は  $z = \delta = \sqrt{2/(\sigma\omega\mu_0)}$  だけ進むと  $1/e$  に減衰します。

従って、表皮効果は、電磁波が  $\epsilon' = 0$  であるような導体に入ったときに電界が  $1/e$  になる距離と考えられます。この条件での反射率はどうなるのでしょうか。電界に対する振幅反射率  $\hat{r}$  は

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon}} \quad (20)$$

ここで  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon'' = i\epsilon''$  を代入すると、

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{i\epsilon''}}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{i\epsilon''}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0} - (1+i)\sqrt{\epsilon''}/2}{\sqrt{\epsilon_0} + (1+i)\sqrt{\epsilon''}/2}$$

光強度反射率は  $R = |\hat{r}|^2 = \hat{r}^* \hat{r}$  で与えられるので

$$R = \frac{(\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{\epsilon''}/2)^2 + \epsilon''/2}{(\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon''}/2)^2 + \epsilon''/2} \quad (21)$$

もし、 $\epsilon'' = 0$  なら  $R=1$  (100%)となります。 $\epsilon'' = \sigma/\omega$  なので反射率そのものは導電率に関係します。

ここまでの話では、誘電率とか導電率というマクロな量しか出てきません。これをキャリア数や移動度に結びつけるのはミクロな考察によるものです。Drude の式においては、

$$\epsilon' = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 1/\tau^2} \right) \quad (22)$$

$$\epsilon'' = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega\tau(\omega^2 + 1/\tau^2)} \quad (23)$$

$\epsilon' = 0$  の条件は、ミクロに(古典電子論的に)見れば、 $\omega = \omega_p$  (プラズマ振動数)において成立します。従って、自由電子反射の onset にはキャリア密度のみが関係します。自由キャリア反射の起き始める位置は、この  $\omega_p$  ですが、

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} \quad (24)$$

となり、 $\tau$  に関係しません。

一方、直流導電率  $\sigma_0$  は

$$\sigma_0 = Ne\mu = Ne \cdot (e\tau/m^*) = Ne^2\tau/m^* \quad (25)$$

なので、 $\omega_p$  を使って書くと、

$$\sigma_0 = \epsilon_0 (Ne^2/m^*\epsilon_0)\tau = \epsilon_0\tau\omega_p^2 \quad (26)$$

となります。従って反射率の値そのものには、導電率が関係し、プラズマ周波数にはキャリア数が関係するとご理解下さい。

Date: Wed, 11 Aug 2004 11:54:59 +0900

Q2:佐藤勝昭 様、A 工業の K です。

お世話になっております。先日は質問に御回答頂き、ありがとうございました。お礼が遅くなり、大変申し訳ありませんでした。

恥ずかしながら、数式と概念の理解に非常に苦しんでおりました。また何点か、お尋ねさせていただきます。

- (1) 表皮効果を導くときには「導体中には電束が存在しない ( $\epsilon = 0$ )」との仮定をするとのことですが、これには妥当性があるのでしょうか。論理的には式(1)~(11)の議論の中でこの仮定を用いているのは(1)→(3)の変形のみであり、「導体については式(1)の第1項の寄与は第2項に比較して小さい」と考えればよいことはわかります。これは、導体に電界が到達した際、そのほとんどは表面で反射され内部に入り込めない。そのため導体内部の電束は0とみなせるということでしょうか。だとすれば、導体の場合、表皮深さは反射率が高いことを前提として導かれているのでしょうか。
- (2) 式(21)について、導電率が反射率に関係していることはわかります。この式によれば、導電率が高くなれば ( $\sigma \rightarrow \infty$ )、反射率が1に近づきますが、逆に導電率が0に近づいても反射率は1になってしまいます。

$\varepsilon'' = 0$ なら  $R=1$  (100%)とはまさにこの状況だと思いますが、これはどう理解すればよいのでしょうか。

(3) 回答中で用いられていた  $\varepsilon'' = \sigma/\omega$  の関係は、一般に成立するのでしょうか。

$\varepsilon' = n^2 - \kappa^2$ ,  $\varepsilon'' = 2n\kappa$ 、あるいは  $\alpha = 1/\delta$  といった関係式から導かれるのでしょうか。

非常に基礎的なことばかりお尋ねしてしまい、心苦しい限りです。理解の進まぬ我が身が情けない限りですが、よろしくお願い致します。では、失礼致します。

---

Date: Wed, 11 Aug 2004 14:21:41 +0900

A2: K 様、佐藤勝昭(ICCG14 参加のため Grenoble 滞在中)です。

手元に資料がないので、お答えできる範囲でお答えします。

- (1) 電磁気学で表皮効果を考えているのは、光に比べ周波数の低い範囲で扱っています。また、Drude の式のよう な電子論に基づいているのではなく、概念的なものです。電束密度  $D$  が導体中では存在しないと a priori に仮定しているのです。電子論的には、 $\varepsilon' = 0$  は厳密には  $\omega = \omega_p$  でしか成り立たないので、 $\omega < \omega_p$  では  $E$  とは逆符号の  $D$  が存在するのですが、「表皮効果」を議論した「高周波工学」の人々の間では、負の誘電率の概念はなかったのではないかと思います。従って、skin depth を吸収係数  $\alpha$  の逆数と定義し直せば正確かもしれませんが、どのみち、どの程度電磁波が入り込むかの目安なので、昔ながらの skin depth の定義でもよいのではないかと思います。これ以上つっこまれても、高周波工学と波動光学という別々のアプローチで進められたものですから、お答えのしようがありません。定義の仕方の問題であると思ってください。
- (2)  $\sigma$  が大きくても小さくても反射率が 100%というのは、インピーダンスマッチングという見方をすれば理解できます。線路インピーダンス  $Z_0$  の分布定数回路において、終端を開放しても短絡しても反射が最大になるのと同じことです。
- (3)  $\sigma$  と  $\varepsilon$  の関係は、Maxwell 方程式、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

において  $\mathbf{J}=0$  として、伝導電流による  $\sigma$  を誘電率のなかに押し込めたことによるものです。

$\exp(-i\omega t)$  の型の電界を考え、上式の右辺を書き直すと、

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = -i\omega \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = -i\omega(\varepsilon + i\sigma/\omega)\mathbf{E}$$

と書けますね。  $\varepsilon + i\sigma/\omega = \varepsilon' + i\varepsilon''$  と書き直し改めてこれを  $\varepsilon$  とおけば、Maxwell 方程式は、 $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  と簡単になります。

この概念を拡張し、導電率も複素数にすれば、一般に、複素誘電率との間に  $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\sigma/\omega$  が成立します。詳しくは、拙著「光と磁気」をご覧ください。

---

Date: Wed, 11 Aug 2004 18:26:00 +0900

AA: A 社 K です。

お世話になっております。外出先より御丁寧なお返事、ありがとうございます。じっくりと勉強させていただきます。取り急ぎ、お礼申し上げます。ありがとうございました。

---