

千葉大学理学部物理学科特別講義  
2007.6.4-6.5

# 磁気光学の基礎と最近の展開(2)

佐藤勝昭

東京農工大学特任教授

# 2.電磁気学に基づく磁気光学の理論

## 2.1 円偏光と旋光性・円二色性

## 2.2 電磁気学による磁気光学効果の理論

### 2.2.1 誘電率テンソル

### 2.2.2 マクスウェル方程式を解く

### 2.2.3 ファラデー効果の現象論

### 2.2.4 磁気カー効果の現象論

## ここで学ぶこと

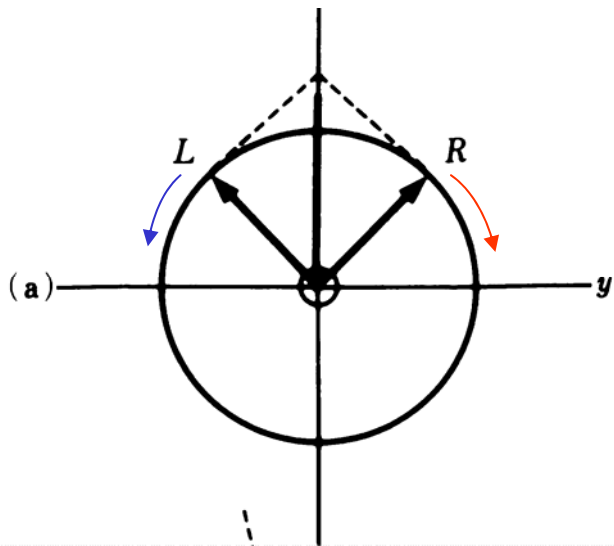
- この講義では磁気光学効果が媒体のどのような性質に基づいて生じるかをマクロな立場に立ってご説明します。
- ここでは媒体のミクロな性質には目をつぶって、媒体を連続体のように扱い、偏光が伝わる様子を電磁波の伝搬として記述します。
- 磁気光学効果は、左右円偏光に対して媒体の応答が異なることによって生じることを述べます。
- このとき媒体の応答を誘電率を使って表します。

## 2.1 円偏光と旋光性・円二色性

- 以下では旋光性や円二色性が左右円偏光に対する媒体の応答の差に基づいて生じることを説明します

# 直線偏光は左右円偏光の合成

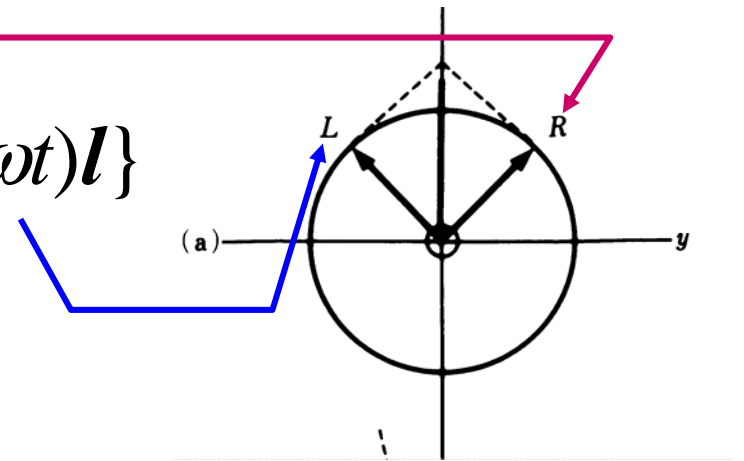
- 直線偏光の電界ベクトルの軌跡は図(a)のように、振幅と回転速度が等しい**右円偏光R**と**左円偏光L**との合成で表されます。



図(a)直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

# 式で書くと

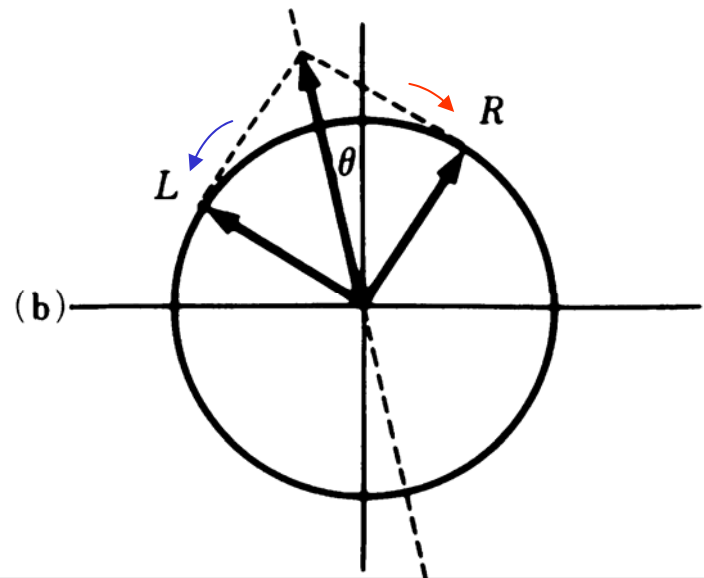
- $E = E_0 \exp(i\omega t) i$   
ここに  $i$  は  $x$  方向の単位ベクトル
- 右円偏光の単位ベクトル  $r$  は  $(i + ij)/2^{1/2}$
- 左円偏光の単位ベクトル  $l$  は  $(i - ij)/2^{1/2}$   
 $i = (r + l)$  となるので
- $E = 2^{-1/2} \{ E_0 \exp(i\omega t) r + E_0 \exp(i\omega t) l \}$



# 左右円偏光の位相が異なる場合

- 媒体を透過した後、図(b)のように左円偏光の位相が右円偏光の位相より進んでいたとすると、合成した電界ベクトルの軌跡も直線で、その向きはもとの偏光の向きから傾いています。
- これが旋光性です。  
回転角は左右円偏光の位相差の1/2です。

図 (b) 媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると偏光が回転します



# 式で書くと

- 右円偏光に対する屈折率 $n^+$
  - 左円偏光に対する屈折率 $n^-$
- とすると、
- 右円偏光の位相は $\omega n^+ z/c$
  - 左円偏光の位相は $\omega n^- z/c$
- であるから右円偏光と左円偏光の位相差は $\omega(n^+ - n^-)z/c$
- この半分が回転角になります。

注： $n$ は屈折率、 $\kappa$ (カッパと読む)は消光係数



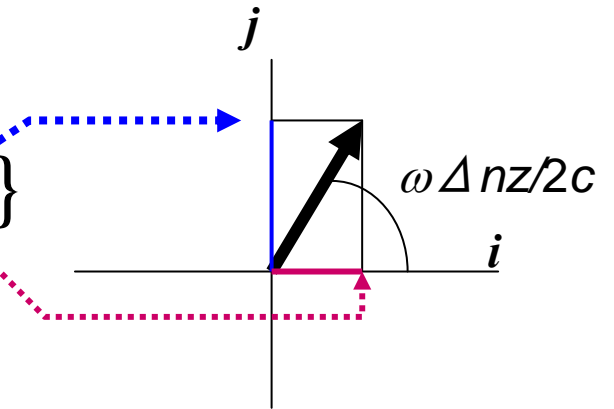
# ベクトルで書くと

- $E = 2^{-1/2} E_0 \{ \exp(i\omega t) \mathbf{r} + \exp(i\omega t) \mathbf{l} \}$  が  
右円偏光に対する屈折率  $n^+$ 、左円偏光に対する  
屈折率  $n^-$  の環境を通過すると、

- $E = 2^{-1/2} E_0 [ \exp\{i\omega(t - n^+ z/c)\} \mathbf{r} + \exp\{i\omega(t - n^- z/c)\} \mathbf{l} ]$   
これを直交系に戻すと、

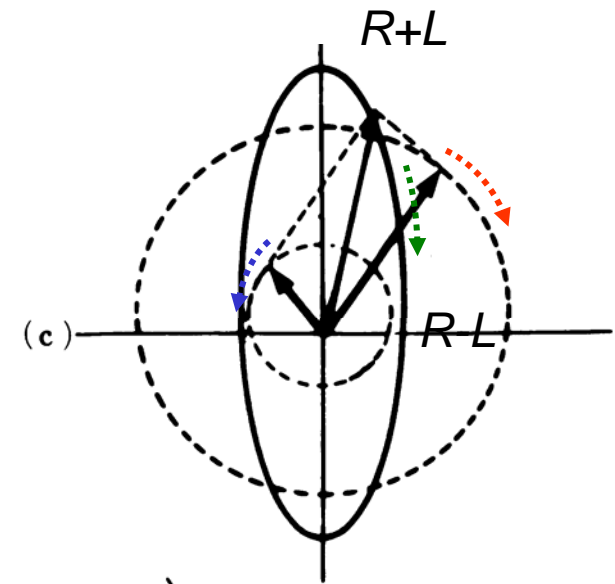
- $E = 2^{1/2} E_0 \exp(i\omega t) \exp(-i\omega n z/c)$   
 $\times \{ \cos(\omega \Delta n z/2c) \mathbf{i} + \sin(\omega \Delta n z/2c) \mathbf{j} \}$

- ここに  $\Delta n = n^+ - n^-$ ,  $n = (n^+ + n^-)/2$



# 左右円偏光の振幅が異なると

- 媒体を透過した後、(c)のように右円偏光と左円偏光のベクトルの振幅に差が生じると、合成ベクトルの軌跡は楕円になります。
- 楕円の短軸と長軸の比の  $\tan^{-1}$  が楕円率角です。



図(c)媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると合成した軌跡は楕円になります

# 式で書くと

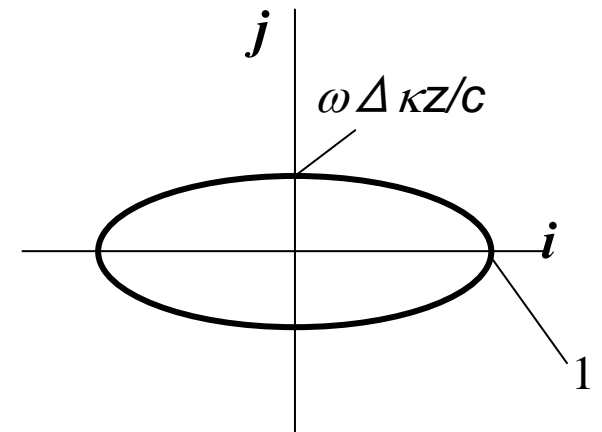
- 右円偏光に対する消光係数  $\kappa^+$
  - 左円偏光に対する消光係数  $\kappa^-$
- とすると、

- 右円偏光の振幅は  $\exp(-\omega\kappa^+z/c)$
- 左円偏光の振幅は  $\exp(-\omega\kappa^-z/c)$

*屈折率は左右円偏光に対し同じであると仮定*

# ベクトルで書くと

- $E = 2^{-1/2} E_0 \{ \exp(i\omega t) \mathbf{r} + \exp(i\omega t) \mathbf{l} \}$  が  
右円偏光に対する消光係数  $\kappa^+$ 、左円偏光に対する消光係  
数  $\kappa^-$  の環境を通過すると、
- $E = 2^{-1/2} E_0 \exp\{i\omega(t - nz/c)\} [\exp(-\omega\kappa^+ z/c) \mathbf{r} + \exp(-\omega\kappa^- z/c) \mathbf{l}]$   
これを直交系に戻すと、
- $E \sim 2^{1/2} E_0 \exp(i\omega t) \exp(-\omega\kappa z/c) \{ \mathbf{i} - i\omega \Delta\kappa z/c \mathbf{j} \}$
- ここに  $\Delta\kappa = \kappa^+ - \kappa^-$ ,  $\kappa = (\kappa^+ + \kappa^-)/2$ 、  
また  $\omega \Delta\kappa z/c \ll 1$  とする
- 楕円率角  $\eta$  は  $\eta = \tan^{-1}(\omega \Delta\kappa z/c)$



注:  $\kappa$  (カツパと読む) は消光係数

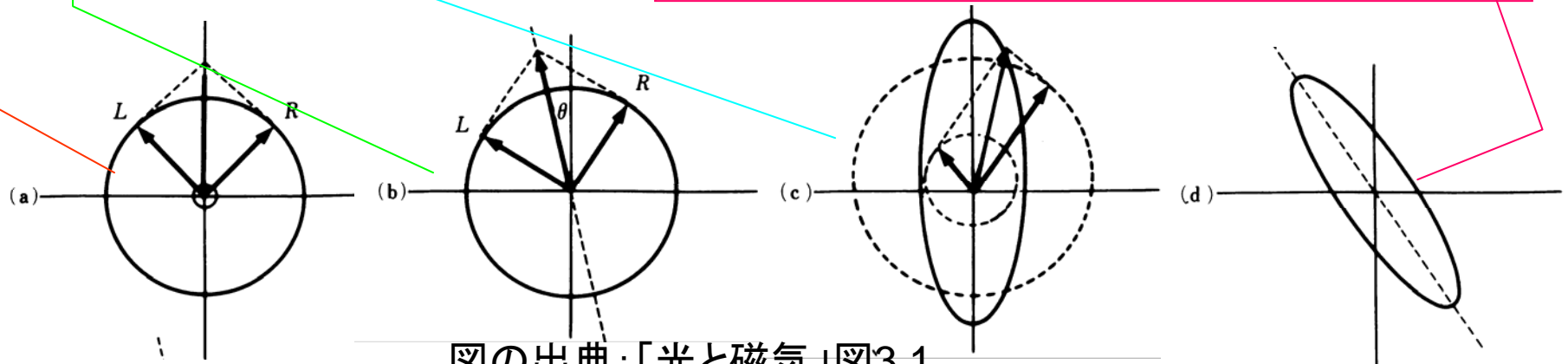
# 円偏光と磁気光学効果：まとめ

直線偏光は等振幅等速度の左右円偏光に分解できる

媒体を通ることにより左円偏光の位相と右円偏光の位相が異なると**旋光**する

媒体を通ることにより左円偏光の振幅と右円偏光の振幅が異なると**楕円**になる

一般には、主軸の傾いた楕円になる



図の出典：「光と磁気」図3.1

## 2.2 電磁気学に基づく磁気光学の理論

### 2.2.0 イントロ

### 2.2.1 誘電率テンソル

### 2.2.2 マクスウェル方程式を解く

### 2.2.3 ファラデー効果の現象論

# イントロ

- 連続媒体中の光の伝わり方はマクスウェルの方程式で記述されます。
- マクスウェルの方程式は、電磁波の電界と磁界との間の関係を与える連立微分方程式であると理解しておいてください。
- 詳しい取り扱いは次回講義で詳しく述べます。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

# James Clerk Maxwell



エジンバラ城を望む(佐藤勝昭画)



*James Clerk Maxwell.*

出生 1831年6月13日

エジンバラ

死去 1879年11月5日

ケンブリッジ



# マクスウェル方程式

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \tilde{\mu} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{電磁誘導の法則}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{アンペールの法則}$$

変位電流



## 2.2.1 誘電率テンソル

# 誘電率

- マクスウェルの方程式で表される電磁波の伝搬において、媒体の応答を与えるのが、比誘電率  $\epsilon$  です。
- 電束密度  $D$  と電界  $E$  の関係は  
$$D = \epsilon \epsilon_0 E$$
と表すことができます。ここに  $\epsilon_0$  は真空の誘電率で、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m です。

# 比透磁率は1として扱う。

- 光の伝搬を考える場合  $B = \mu_0 H$  と扱います。  
すなわち、比透磁率  $\mu$  は1とします。
- 磁性体中の伝搬であるから比透磁率  $\mu$  は1ではないと考える人があるかも知れませんね。
- 光の振動数 ( $10^{14}$ - $10^{15}$  Hz) くらいの高い周波数になると巨視的な磁気モーメントは、磁界に追従できなくなるため、透磁率を  $\mu \cdot \mu_0$  としたときの比透磁率  $\mu$  は1として扱ってよいのです。 $\mu_0$  は真空の透磁率で、 $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$  H/m と与えられます。

# 誘電率テンソル

$D$ も $E$ もベクトルなのでベクトルとベクトルの関係を与える量である $\varepsilon$ は2階のテンソル量です。

2階のテンソルというのは、2つの添字をつかって表される量で、 $3 \times 3$ の行列と考えてさしつかえありません。

(ここではテンソルを表すため記号 $\sim$ (チルダ)をつけます)

$$D = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 E$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} \varepsilon_0 E_j$$

テンソル要素を使って表現すると下の式ようになります。  
繰り返す添え字について総和をとるというテンソル演算の約束に従っています。

# 誘電率テンソルの一般的表示

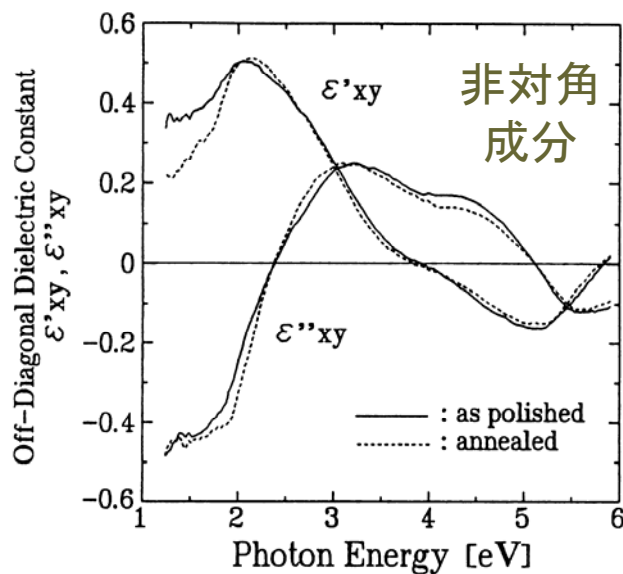
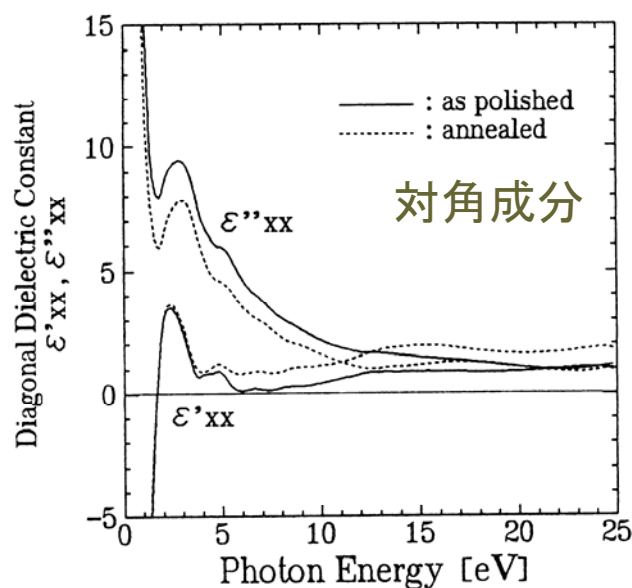
- 一般的な場合、誘電率テンソルは、下記のような9個のテンソル要素で表すことができます。各要素は複素数です。

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + i\epsilon''_{ij}$$

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

# 誘電率スペクトルの一例：PtMnSb

- 図をご覧ください。これは私たちが測定したPtMnSbという強磁性体の磁気光学効果に関する磁気光学スペクトルです。
- 測定したのは反射スペクトルと磁気カー効果のスペクトルですが、ここには比誘電率テンソルの対角、非対角成分のスペクトルが示されています。
- 左が誘電率テンソルの対角成分  $\epsilon_{xx}$ 、右が非対角成分  $\epsilon_{xy}$  のスペクトルです。



図の出典：「光と磁気」図6.24

# なぜ誘電率テンソルを用いるの？

- 屈折率、反射率やカー回転角などは、入射角や磁化の向きに依存する量で、媒体固有の応答を表す量ではありません。これに対し、誘電率テンソルは媒体に固有の物理量です。
- また、誘電率テンソルは、物質中の電子構造や光学遷移の遷移行列に直接結びつけることができ、理論計算の結果とすぐに対応できる物理量です。



# 等方性の媒体の誘電率テンソル

- 媒体中の光の伝搬のしかたが光の進行方向によらないとき、その媒体は光学的に等方であるといえます。
- そのときの誘電率テンソルは、スカラーと同じなので、等しい3つの対角成分  $\varepsilon_{xx}$  のみで表せます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} = \varepsilon_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

# 異方性のある媒体の誘電率テンソル

- 磁化がないとき等方性であった媒体にz軸方向に磁化を持たせたとしますと、z軸を異方軸とする一軸異方性を持ちます。(z軸に垂直な向きに関しては等方的)
- この場合、比誘電率のテンソルは、z軸のまわりの任意の角度の回転に対して不変となります。
- たとえば90° の回転 $C_4$ を施し次式となります。

$$C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \tilde{\varepsilon} \quad (3.10)$$

座標系の回転操作 $C_4$ に対して、なぜ誘電率テンソルの回転が左辺のように表せるのかは、課題(1)としますので自分でやってみてください。

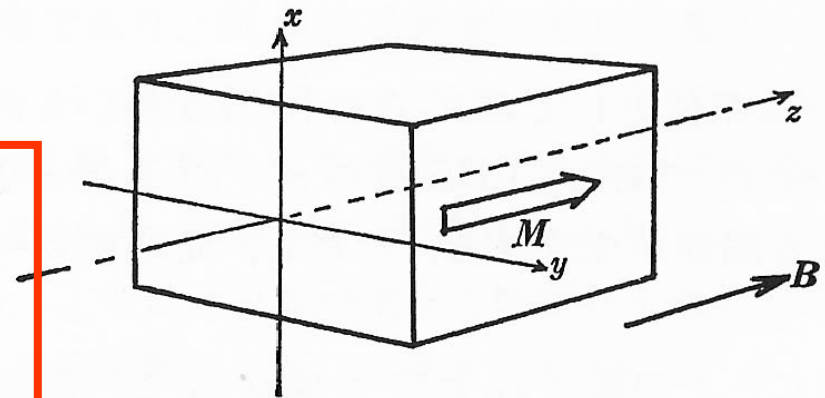


図 3.2 座標軸と磁化の向き

- (a)に実際に $C_4$ の演算を施すと (b)となります。
- (a)=(b)として要素を比較すると式(3.11)が得られます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

$$\tilde{\varepsilon}' = C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & -\varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{b})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} &= -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

テンソル(a)に $C_4$ を操作して(b)になることを確かめて下さい。次にそれにもとづき(3.11)を証明して下さい。これを課題(2)とします。

$\varepsilon_{zz}$ については何ら制約がありません。 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$ である必要はありません。

# 磁化のある媒質の誘電率テンソル

- 従って、等方性媒質に磁化を付与したときの非誘電率  $\varepsilon$  テンソルは  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  の3つの要素だけを使って、次のように簡単に書けます。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

# よくある質問

- 誘電率テンソルの対角・非対角とは何ですか

A: 添え字が  $xx, yy, zz$  のように対角線上に来るものを対角成分、 $xy, yz, zx$  のように対角線上にないものを非対角成分といいます。

- もともと異方性がある場合の誘電率テンソルはどのように考えればよいのでしょうか

A: もともと1軸異方性があるとき、その対称軸に平行な磁化がある場合は、今やった等方性の場合と同じですが、磁化が任意の方向を向いているときは、全ての非対角成分が有限の値をとります。

# よくある質問

- 誘電率テンソルはどのように測定するのですか。  
A:対角成分はエリプソメトリなど通常分光光学で、 $n$ 、 $\kappa$ を求め、 $\varepsilon_{xx}' = n^2 - \kappa^2$ 、 $\varepsilon_{xx}'' = 2n\kappa$ によって計算します。  
– 非対角成分については、磁気光学効果測定装置を用いて回転角  $\theta$ 、楕円率  $\eta$  のスペクトルを求め、上に述べた光学定数  $n$ 、 $\kappa$  を用いて計算で求めます。

$$\varepsilon'_{xy} = -\frac{2c}{\omega l} (n\eta + \kappa\theta)$$

$$\varepsilon''_{xy} = -\frac{2c}{\omega l} (\kappa\eta - n\theta) \quad (\text{Faraday効果の場合})$$

注： $n$ は屈折率、 $\kappa$  (カツパと読む)は消光係数

# 磁化 $M$ の関数としての誘電率

- さて、磁気光学効果においての各成分は $M$ の関数ですから、は次式のように表せるはずで

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(M) & \varepsilon_{xy}(M) & 0 \\ -\varepsilon_{xy}(M) & \varepsilon_{xx}(M) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(M) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

- $\varepsilon_{ij}(M)$ を次式のように $M$ でべき級数展開します。

$$\varepsilon_{ij}(M) = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_n \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij}^{(n)} M^n \quad (3.14)$$

# Lars Onsager

- Norwegian-American chemist and physicist.

The Nobel Prize in Chemistry 1968

磁化がある場合は非相反になる

$$\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M)$$



出生 1903年11月27日  
オスロ

死去 1976年10月5日



# 誘電率の成分と磁化依存性

- Onsagerの式  $\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M)$  (3.15)

を適用すると、対角成分は

$$\varepsilon_{xx}(M) = \varepsilon_{xx}(-M)$$

となり、Mについての偶関数であることが分かる。

- 一方、非対角成分については

$$\varepsilon_{xy}(M) = -\varepsilon_{yx}(-M)$$

が成り立つので、Mについて奇関数であることが  
わかる

# 誘電率テンソルの磁気応答

- 対角成分は $M$ の偶数次のみ、非対角成分は $M$ の奇数次のみで展開できます。

$$\varepsilon_{xx}(M) = \varepsilon_{xx}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{xx}^{(2n)} M^{2n} / (2n)!$$

$$\varepsilon_{xy}(M) = \sum_n \varepsilon_{xy}^{(2n+1)} M^{2n+1} / (2n+1)! \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_{zz}(M) = \varepsilon_{zz}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{zz}^{(2n)} M^{2n} / (2n)!$$

- $\varepsilon_{xy}(M)$ がファラデー効果やカー効果をもたらし、 $\varepsilon_{xx}(M)$ と $\varepsilon_{zz}(M)$ の差が磁気複屈折(コットン・ムートン効果)の原因となります。

# 誘電率と導電率

- 電流密度と電界の関係は次式であらわされます。

$$J = \tilde{\sigma}E$$

$$J_i = \sigma_{ij}E_j$$

- 導電率（電気伝導率）のテンソルは

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

で表されます。

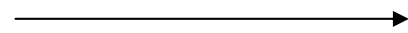
# 誘電率と導電率の関係

- 誘電率と導電率には右の式で表される関係があります。

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega \epsilon_0}$$

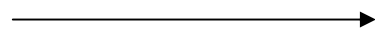
- 成分で書くと

– 対角成分は



$$\epsilon_{xx} = 1 + i \frac{\sigma_{xx}}{\omega \epsilon_0}$$

– 非対角成分は



$$\epsilon_{xy} = i \frac{\sigma_{xy}}{\omega \epsilon_0}$$

- 誘電率の実数部・虚数部は導電率のそれぞれ虚数部・実数部に対応します。

# 誘電率と導電率のどちらを使うか

- 誘電率 $\epsilon$ と導電率 $\sigma$ には簡単な関係が成り立つので、媒質の光応答を表すときに、 $\epsilon$ 、 $\sigma$ のいずれを用いて記述してもよいのですが、一般には、**金属を扱うときは $\sigma$ を、絶縁体であれば $\epsilon$ を用いるのが普通です。**
- 金属の $\epsilon$ は、 $\omega \rightarrow 0$ の極限すなわち直流においては自由電子の遮蔽効果のために発散してしまうのに対し、 $\sigma$ は有限の値に収束するので都合がよいからです。

# 課題

- $z$ 方向の磁化をもつ場合の比誘電率テンソルの要素間に(3.11)式が成り立ち、その結果、誘電率テンソルは(3.12)式で与えられることを導いてください。

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$$

$$\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

## 2.2.1 まとめ

- 等方性の媒質が $z$ 軸方向の磁化をもったとき、その比誘電率テンソルは、3つの成分で表すことができることを学びました。
- 誘電率テンソルの対角成分は磁化の偶関数で表されるのに対し、非対角成分は磁化の奇関数で表されることを学びました。

# 次のステップ

- 次のステップでは、この誘電率テンソルをマクスウェルの方程式に代入して複素屈折率 $N$ の固有値を求めます。

固有方程式は  
右の式になるので任意の $E$ に対して式が成立する条件から複素屈折率の固有値が求められます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}$$

ここで $N_+$ と $N_-$ に対応する固有関数はそれぞれ右円偏光、左円偏光であることが導かれます。さらに、非対角成分 $\epsilon_{xy}$ が無ければ、左右円偏光の応答に差がなく、光学活性が生じないということを学びます。



## 2.2.2 マクスウェル方程式を解く

## 2.2.2で学ぶこと

- 光の伝搬とマクスウェルの方程式
  - 固有解: 波動解、固有値: 複素屈折率
- ファラデー配置の場合の固有値と固有状態
  - 2つの固有値と対応する固有状態(円偏光)
- ファラデー効果の現象論
  - ファラデー効果と誘電率テンソル
- フォークト配置の場合の固有値と固有状態
  - コットンムートン効果: 磁気誘起の複屈折

•2.2.2では光と磁気第3章3.3と3.4に沿ってお話します。

# マクスウェルの方程式

- 光の電界ベクトルを $E$ 、電束密度ベクトルを $D$ 、磁界ベクトルを $H$ 、磁束密度ベクトルを $B$ 、電流を $J$ とすると、次の関係が成立します。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

(SI単位系)

# マクスウェル方程式をEとHで表す

- 簡単のため、 $J=0$ と置きます。

[つまり、伝導電流を分極電流(変位電流)の中に繰り込みます]

- $B$ と $H$ 、 $D$ と $E$ の関係式が得られます。

$$B = \mu_0 H$$

$$D = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 E$$

誘電率テンソル

- (3.17)に代入すると次の関係式が得られます。

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot } H &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

式(3.18)においては、微分方程式が2個、変数もEとHの2個ですから、解を求めることができます。

# マクスウェル方程式を解く: 2つの方法

1. 1つは、第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替え、 $\partial H / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動式を代入し、 $E$ についての2次方程式を得ます。
2. もう1つは、 $E$ と $H$ に先に $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動関数を代入し、通常の変立1次方程式にします。ここで $H$ を消去すると $E$ についての2次方程式を得ます。(教科書「光と磁気」では後のやり方を使っています。)

# マクスウェル方程式を解く [1]

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.18)$$

- 第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替え、 $\partial \mathbf{H} / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動式を代入し、 $\mathbf{E}$ についての2次方程式を得ます。

# マクスウェル方程式を解く [1]-1

- (3.18)の第2式の両辺を $t$ で偏微分します。

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替えます。

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- ここに(3.18)の第1式

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{E} \quad \text{を代入します。}$$

# マクスウェル方程式を解く [1]-2

これより  $\text{rot}\left(-\frac{1}{\mu_0}\text{rot } \mathbf{E}\right) = \tilde{\epsilon}\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$  が得られ、

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon}\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \text{ となります。}$$

ここで、 $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  という関係を用いました。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \text{ をマクスウェルの方程式と いうことがあります。}$$



# マクスウェル方程式を解く [1]-3

- ここで、rot、grad、divの間に成り立つ次の公式を用います。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

- この結果Eについての2階の微分方程式が得られます。

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- この式に次の波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入するとEについての方程式(3.20)が得られます。

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

# 自習課題(1)

- 始めにrot Aにrotを及ぼすとどうなるか確かめてください。(物理数学などで学んだはずです)  
 $\text{rot rot } A = \nabla \times (\nabla \times A) = \text{grad}(\text{div}A) - \nabla^2 A$
- 次に、

$$\text{grad div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\varepsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

に波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入し

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad \text{が成立することを確かめてください。}$$

# マクスウェル方程式を解く [2]

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.18)$$

- $E$ と $H$ に、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動関数を代入し、通常の連立1次方程式にします。ここで $H$ を消去すると $E$ についての2次方程式を得ます。

# マクスウェル方程式を解く [2]-1

- ここでは、微分演算を使わない方法を紹介します。EおよびHについての波動の式は、波数ベクトル*K*として

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \\ H &= H_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

のように表すことができます。ここに*E*<sub>0</sub>, *H*<sub>0</sub>は時間や距離に依存しない定数ベクトルです。

- 式(3.19)をマクスウェルの方程式(3.18)に代入すると、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega\mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mathbf{E}$$

となります。

# マクスウェル方程式を解く [2]-2

- 両式から $H$ を消去し、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \times \frac{1}{\omega\mu_0} (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mathbf{E}$$

固有方程式として

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

が得られます。

ここに $\mathbf{K}$ は波数ベクトルです。

## 自習課題(2)

- 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導いてください。  
ここで、ベクトル積の公式

$$A \times (B \times C) = (C \cdot A)B - (B \cdot A)C$$


を利用してください。


# 固有方程式を解く [1]

- いずれの手続きでも式(3.20)が導かれました。

$$(E \cdot K)K - |K|^2 E + (\omega / c)^2 \tilde{\epsilon} E = 0 \quad (3.20)$$

それでは(3.20)を解いて $K$ の固有値と対応する電界ベクトル $E$ の固有関数を求めましょう。

- ここで複素屈折率、すなわち、 $\hat{N} = n + i\kappa$ を導入します。ここに $n$ は屈折率、 $\kappa$ は消光係数です。
- 媒質中において波数 $K$ は  実数部は空間的な波の波長を与えます

[注]  $K = \omega \hat{N} / c = \omega n / c + i\omega \kappa / c$   虚数部は波の減衰を与えます。

[注] 波数 $K$ は $2\pi/\lambda'$ となる。ここに $\lambda'$ は媒質中での波長で、媒質中での光速を $c'$ とすると $\omega/c'$ と表される。媒質中での光速 $c'$ は屈折率を $n$ とすると $c/n$ で与えられるから、 $K = \omega n / c$ である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率 $N$ 、すなわち $n + i\kappa$ を導入すると、上の式となる。

# 複素屈折率 $n+i\kappa$

- 電磁波の空間変化を  $\exp(iKz)$  で表します。
- $K=\omega N/c=\omega(n+i\kappa)/c$  とします。
- $\exp(iKz)=\exp(i\omega n z/c)\exp(-\omega\kappa z/c)$  と書けます。
- この波動は、振幅が距離  $z$  とともに振動しながら減衰する波を表します。
- 光の強度の減衰を表すときには  $|\exp(iKz)|^2$  を考えます。  
 $|\exp(iKz)|^2 = \exp(-2\omega\kappa z/c)$
- これを吸収係数  $\alpha$  を用いて  $\exp(-\alpha z)$  に等しいと置くと、  
 $\alpha = 2\omega\kappa/c = 4\pi\kappa/\lambda$  と表すことができます。



## 固有方程式を解く [2]

- 波数ベクトルの向きに平行で長さが  $\hat{N}$  であるような屈折率ベクトル  $\hat{N}$  を用いると、(3.19)の第1式は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{N} \cdot \mathbf{r} / c)\} \quad (3.21)$$

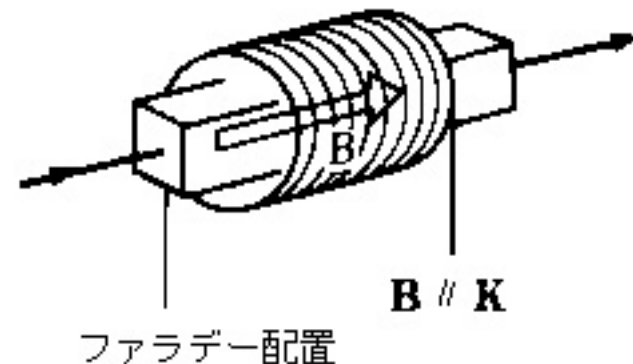
となり、固有方程式(3.20)は

$$\hat{N}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \hat{N}) \hat{N} - \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.22)$$

によって記述できます。

- 以下では、第2回に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求めます。

# ファラデー配置の場合



- 磁化がz軸方向にあるとして、z軸に平行に進む波( $\mathbf{N} \parallel z$ )に対して式(3.21)は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{N}z/c)\} \quad (3.23)$$

- と表されます。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

と書けます。この式は下に2式に分けられます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0, \quad (3.24') \quad -\varepsilon_{zz} E_z = 0 \quad (3.24'')$$

# 永年方程式

- 式(3.24')がEの如何によらず成立するには、

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\implies (\hat{N}^2 - \varepsilon_{xx})^2 + \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- これより、 $N^2$ の固有値として2個の値

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26)$$

$$\left( \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \right)^2 = -\varepsilon_{xy}^2 = (i\varepsilon_{xy})^2$$

- を得られます。これらの固有値に対応する固有関数は、

$$E_{\pm} = \frac{E_0}{2} (i \pm ij) \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_{\pm}}{c} z\right)\right\} \quad (3.27)$$

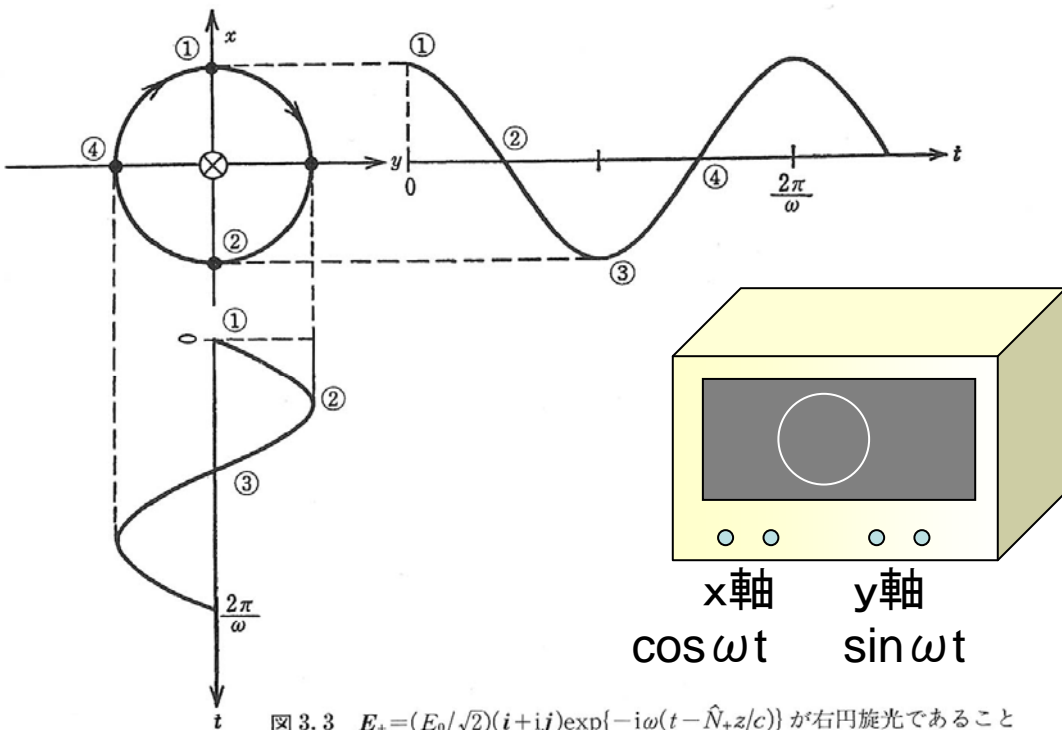
- $E_+$ 、 $E_-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応します。

$E^+$ 、 $E^-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応

$$E_+ = \frac{E_0}{2} (i + i j) \exp(-i\omega t)$$

実数部のみを考えると

$$\text{Re}(E_+) = \frac{E_0}{2} \{ \cos \omega t i + \sin \omega t j \}$$



- 直交する2つの直線偏光の位相が90度異なっているときに合成したベクトルの軌跡は円になります。
- x軸に $\cos \omega t$ 、y軸に $\sin \omega t$ を入力したときのオシロスコープのリサージュ波形を思い出してください。

図の出典: 佐藤勝昭「光と磁気」

# 課題

- Z軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、Eの如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26)$$

## 2.2.2のまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の複素屈折率は

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します。

(ここに、 $\varepsilon_{xx}$ は誘電テンソルの対角成分、 $\varepsilon_{xy}$ は非対角成分です。)

- もし $\varepsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じません。

## 2.2.3 ファラデー効果の現象論

# ファラデー効果の現象論

- 2.2.2に述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じます。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電テンソル  $\varepsilon$  の成分を使ってどのように書き表せるかを述べます。
- 結論から先に述べると、ファラデー回転角  $\phi_F$ 、ファラデー楕円率  $\eta_F$  は  $\varepsilon_{xy}$  の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれます。
  - まず、右円偏光および左円偏光に対する屈折率  $n_+$  と  $n_-$ 、消光係数  $\kappa_+$  と  $\kappa_-$  および  $\varepsilon_{xy}$  との関係からスタートします。



# 左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

- すでに述べたように、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26) \quad \text{と書けますが、複号を別々に書くと、}$$

$$\hat{N}_{+} = n_{+} + i\kappa_{+} \quad \hat{N}_{-} = n_{-} + i\kappa_{-} \quad \text{となります。}$$

ここで、

$$\Delta n = n_{+} - n_{-}; \Delta\kappa = \kappa_{+} - \kappa_{-}; n = \frac{n_{+} + n_{-}}{2}; \kappa = \frac{\kappa_{+} + \kappa_{-}}{2}$$

という置き換えをすると、

$$\begin{array}{l} n_{+} = n + \Delta n / 2; \quad n_{-} = n - \Delta n / 2 \\ \kappa_{+} = \kappa + \Delta \kappa / 2; \quad \kappa_{-} = \kappa - \Delta \kappa / 2 \end{array}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \hat{N}_{+} &= n_{+} + i\kappa_{+} = (n + \Delta n / 2) + i(\kappa + \Delta \kappa / 2) \\ &= (n + i\kappa) + (\Delta n + i\Delta \kappa) / 2 \end{aligned}$$

# 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係(1)

$$\hat{N}_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i \left( \kappa \pm \frac{\Delta \kappa}{2} \right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2}(\Delta n + i\Delta \kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2}\Delta N \quad (3.37)$$

ここに  $\Delta N = N_+ - N_- = \Delta n + i\Delta \kappa \quad (3.38)$

- この  $N_{\pm}$  を(3.26)に代入して

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \left( \hat{N} \pm \Delta \hat{N} / 2 \right)^2 \approx \hat{N}^2 \pm \hat{N} \Delta \hat{N} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26')$$

$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= n^2 - \kappa^2; \quad \varepsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \varepsilon'_{xy} &= n\Delta \kappa + \kappa\Delta n \quad \varepsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{aligned}$	(3.39)
---	--------

# 自習課題(3)

- 式(3.39)の関係式を導いてみよう。

ヒント 式(3.26)の第1式  $N_+^2 = \varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}$  に

$N_+ = n_+ + i\kappa_+$ 、 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx}$ 、 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy}$  を代入すると  
 $(n_+ + i\kappa_+)^2 = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} + i(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})$  が得られる。

これに、 $n_+ = n + \Delta n/2$ 、 $\kappa_+ = \kappa + \Delta\kappa/2$  を代入し、  
 $\Delta n$  および  $\Delta\kappa$  について 1 次の項のみを考えると、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} - \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{xy})$$

同様に  $N_-^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$  について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} - \varepsilon'_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式(3.39)が得られる。

# 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係(1)

- $\Delta n$ と $\Delta \kappa$ を $\varepsilon_{xy}$ を使って表すと次式になります。

$$\Delta n = \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2}; \quad \Delta \kappa = \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \quad (3.40)$$

- $\Delta N$ に書き直すと

$$\Delta \hat{N} = \Delta n + i\Delta \kappa = \frac{i(n - i\kappa)(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})}{n^2 + \kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.41)$$

こんな導き方もできます。

$$\Delta \hat{N} = \hat{N}_+ - \hat{N}_- = \sqrt{\varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}} \approx i \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(1)

- 図3.4に示すようにxz面を振動面とする直線偏光 $E_{in}$ が物質に入射したとします。ここに光の進行方向はz軸の向きである。x軸の単位ベクトルを $i$ , y軸の単位ベクトルを $j$ とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられます。

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) i \quad (3.42)$$

- ここで、右円偏光単位ベクトル $r$ と、左円偏光単位ベクトル $l$ を次式のように定義します。

$$r = (i + ij)/2^{1/2}, \quad l = (i - ij)/2^{1/2} \quad (3.43)$$

- 式(3.42)を $r$ と $l$ を使って表すと、

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) (r + l) \quad (3.44)$$

- のように表されます。

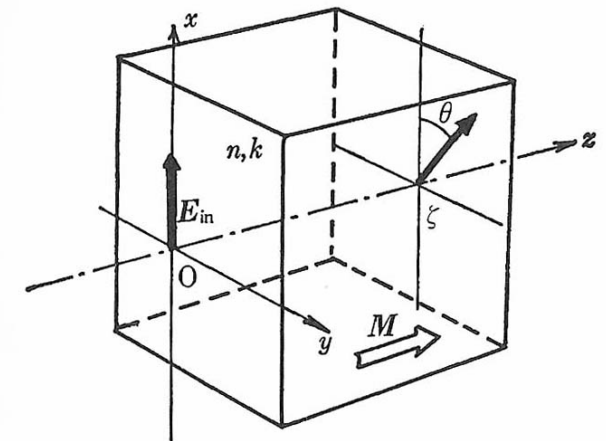


図3.4 座標系のとり方  
光の進行方向(=磁化の方向)をz軸正の向きに、入射直線偏光の電界の振動方向をx軸にとる。回転角は図の方向を正とする。

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(2)

- 物質中の複素屈折率は右円偏光に対しては $N_+$ 、左円偏光に対しては $N_-$ である。表面を $z=0$ として物質中の $z=\zeta$ の位置では、位相がそれぞれ $i\omega N_+ \zeta / c$  および  $i\omega N_- \zeta / c$  だけ進むので、

$$\begin{aligned} E_{out} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(i\omega \hat{N}_+ \zeta / c) \mathbf{r} + \exp(i\omega \hat{N}_- \zeta / c) \mathbf{l} \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}}{c} \zeta\right)\right\} \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta \hat{N}}{2c} \zeta\right) \mathbf{r} + \exp\left(-i\omega \frac{\Delta \hat{N}}{2c} \zeta\right) \mathbf{l} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表されます。第2式では

$$N_+ = N + \Delta N / 2, \quad N_- = N - \Delta N / 2 \quad \text{と置き換えました。}$$

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta \kappa$ で表す(3)

- ここで、ふたたび、もとの $xy$ 座標系に戻すと

$$E_{out} = \frac{E_0}{2} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \left[ \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) + \exp\left(-i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{i} + i \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) - \exp\left(-i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right] \quad (3.45')$$

さらに式(3.38)を使って書き直すと

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times \left[ \left\{ \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) - i \frac{\omega\Delta \kappa}{2c}\zeta \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{i} - \left\{ \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) + i \frac{\omega\Delta \kappa}{2c}\zeta \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right] \quad (3.46)$$

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(4)

- 図3.5に示すように、座標系を $z$ 軸の回りに $\theta = -(\omega \Delta n \zeta / 2c)$ だけ回転した座標系を $x'y'z'$ で表しその単位ベクトルを $i', j', k'$ とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

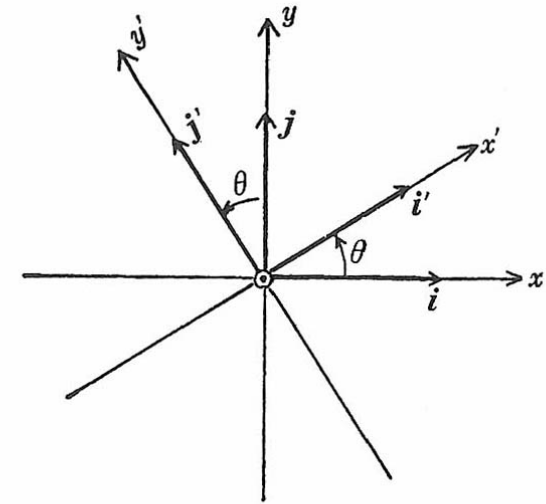


図3.5  $z$ 軸のまわりに $\theta$ だけ回転した座標系  
 $z$ 軸は紙面に垂直上向きにとる。

で表せる。これを使って $E_{out}$ は次のように書き直せます。

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left( i' - i\left(\frac{\omega\Delta k}{2c}\zeta\right)j' \right) \quad (3.48)$$



# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(5)

- もし、磁気円二色性がないとすると $\Delta k=0$ であるから、 $E_{\text{out}}$ は*i*'成分のみとなり、 $x'$ 軸方向の直線偏光であることがわかります。入射直線偏光は $x$ 軸から $x'$ 軸へと $\theta$ だけ回転したのである。これがファラデー回転角 $\theta_F$ である。すなわち、ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta \quad (3.49)$$

$\Delta k \neq 0$ のときは、式(3.48)は $x$ 軸を長軸、 $y$ 軸を短軸とする楕円偏光になります。この楕円偏光の楕円率 $\eta_F$ は短軸と長軸の振幅の比で与えられ

$$\eta_F = -\frac{\omega\Delta k}{2c}\zeta \quad (3.51) \quad \text{と表されます。}$$

# ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す(1)

- いま、複素ファラデー回転角  $\Phi_F = \theta_F + i\eta_F$  (3.52) を  
によって定義すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}(\Delta n + i\Delta\kappa)\zeta = -\frac{\omega\Delta\hat{N}}{2c}\zeta \quad (3.53)$$

と書けます。この式に式(3.41)  $\Delta\hat{N} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$ を代入すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}\zeta \quad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分 $\varepsilon_{xy}$ に比例し、対角成分 $\varepsilon_{xx}$ の平方根に反比例することがわかります。

## ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す(2)

- 式(3.54)を実数部と虚数部に分けて記述すると

$$\theta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \quad (3.55)$$

$$\eta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

このように、ファラデー回転角と楕円率は誘電テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。

# ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す(3)

- 通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので、式(3.55)において $k=0$ と置くと、

$$\theta_F = \frac{\omega \varepsilon''_{xy}}{2cn} \zeta \quad (3.57) \quad \text{となつて、回転角が} \varepsilon_{xy} \text{の虚数部に、楕円率が} \varepsilon_{xy} \text{の実数部に対応することがわかりました。}$$
$$\eta_F = -\frac{\omega \varepsilon'_{xy}}{2cn} \zeta$$

磁化 $M$ による展開式を代入すると

$$\Phi_F \approx -\frac{i\pi\ell}{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon_{xy}^{(1)} M}{\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xx}^{(2)} M^2}}$$

となり、磁気光学効果は $M$ の小さいときほぼ $M$ に比例します。

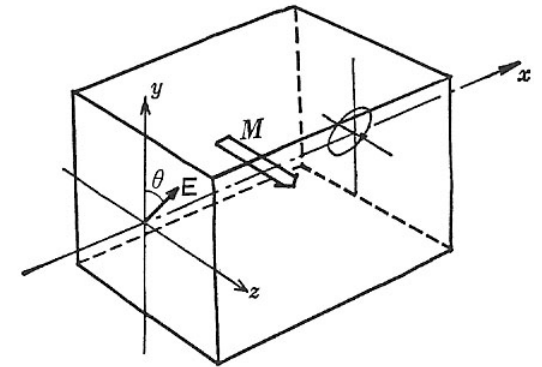
# フォークト配置の磁気光学

- 磁化  $M$  に垂直な  $x$  軸に平行に進む波 ( $N//x$ ) に対しては、波動関数は、

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nx/c)\} \quad (3.29)$$

- と表されます。固有方程式は

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30)$$



- となるので、永年方程式は次の式で表されます。

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

# フォークト配置の場合の固有値

- $N^2$ の固有値として

$$\hat{N}_1^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \quad \text{および} \quad \hat{N}_2^2 = \varepsilon_{zz}$$

という2つの解を得ます。対応する固有関数は

$$E_1 = A \exp \left\{ -i\omega \left( t - \frac{\hat{N}_1}{c} x \right) \right\} (\varepsilon_{xy} \mathbf{i} - \varepsilon_{xx} \mathbf{j}) \quad (3.33)$$

$$E_2 = B \exp \left\{ -i\omega \left( t - \frac{\hat{N}_2}{c} x \right) \right\} \mathbf{k}$$

となり、磁気複屈折を生じます。

# コットンムートン効果

- コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合（フォークト配置）の磁気光学効果です。
- この効果は磁化 $M$ の偶数次の効果であって磁界の向きに依存しません。
- いま、磁化 $M$ が存在すると $M$ の方向に一軸異方性が誘起され、 $M$ 方向に振動する直線偏光（常光線）と $M$ に垂直の方向に振動する光（異常光線）とに対して屈折率の差が生じて、複屈折を起こす現象です。
- 磁化のある場合の誘電テンソルの対角成分  $\varepsilon_{xx}(M)$  と  $\varepsilon_{zz}(M)$  が一般的には等しくないことから生じます。  $\varepsilon$  テンソルの対角成分はその対称性から $M$ について偶数次でなければならないので、複屈折によって生じる光学的遅延も $M$ の偶数次となります。
- コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて、モード変換部として用いられます。

## 2.2.3のまとめ

- 透過光に対する磁気光学効果であるファラデー効果は、誘電率テンソルの非対角成分と対角成分の両方を使って記述されることがわかりました。
- また、フォークト配置の磁気光学効果であるコットンムートン効果については対角成分が重要であることがわかりました。



## 2.2.4 磁気力一効果の現象論

(結果のみ)

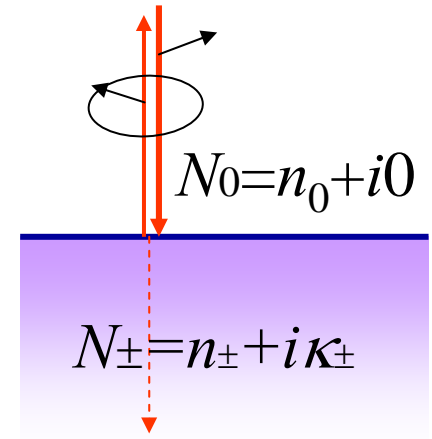
# 磁気カー効果

- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果を記述するには、反射面での境界条件の下にマクスウェル方程式を解くことになり、やや面倒な手続きが必要となります。
- 詳細は、光と磁気第3章3.5・3.6をご参照下さい。

# 垂直入射の場合の極カー効果

- 問題を複雑にしないために、**極カー効果**の場合を扱い、しかも入射光は界面に垂直に入射するものとします。
- 極カー効果は直線偏光が入射したとき、反射光が楕円偏光となり、その楕円の長軸の向きが入射光の偏光方向に対して回転する現象です。
- この回転をカー回転角  $\theta_K$  で表し、楕円の長軸と短軸の比を楕円率  $\eta_K$  で表します。
- カー回転角は右円偏光と左円偏光に対する移相量の差に対応し、楕円率は左右円偏光に対する反射率の違いから生じることを示すことができます。

# Kerr効果



- 右円偏光および左円偏光に対する垂直振幅反射率は

$$\hat{r}_{\pm} = \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} \quad (3.78)$$

によって表すことができます(ここに $n_0$ は入射側媒体の屈折率です). 複素振幅反射率(フレネル係数)を右円偏光に対して $r_+ \exp(i\theta_+)$ 、左円偏光にして $r_- \exp(i\theta_-)$ とすると、カー回転角 $\varphi_K$ は

$$\varphi_K = \frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \equiv \frac{\Delta\theta}{2} \quad (3.79)$$

で与えられます. また、カー楕円率 $\eta_K$ は次式で与えられます。

$$\eta_K = -\frac{|r_+| - |r_-|}{|r_+| + |r_-|} \equiv -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad (3.80)$$

# 複素力一回転

- 磁気力一回転角  $\varphi_K$  と磁気力一楕円率  $\eta_K$  をひとまとめにした複素力一回転  $\Phi_K$  を考えます。

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = \frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right)$$

$$\hat{r} = re^{i\theta}$$

$$\Delta\hat{r} = \Delta re^{i\theta} + ire^{i\theta} \Delta\theta$$

$$\frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}} = \frac{\Delta re^{i\theta} + ire^{i\theta} \Delta\theta}{re^{i\theta}} = \frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta$$

$$\Phi_K = -i\frac{\Delta\hat{r}}{2\hat{r}} \approx i\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}}\right) \approx i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \Delta\hat{r}/2\hat{r}}{1 + \Delta\hat{r}/2\hat{r}}\right) = i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.81)$$

# 複素カー回転を誘電率で表す(1)

- 結果を先に述べておくと、式(3.81)と式(3.77)とから、次式を得ます。

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.82)$$

- この式は、カー効果が誘電率の非対角成分  $\varepsilon_{xy}$  に依存するばかりでなく、分母に来る対角成分  $\varepsilon_{xx}$  にも大きく依存することを表している重要な式です。
- 次のスライドで詳しい導き方を説明します。

# 式(3.82)の誘導

(3.78)

- $r_{\pm}$ を $N_{\pm}$ を使って表し、 $N_{\pm}$ に $\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\pm} &= \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} + n_0} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / \varepsilon_{xx})} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / \varepsilon_{xx})} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\varepsilon_{xx}) - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\varepsilon_{xx}) + n_0} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0} \cdot \frac{1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}} (\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0)}{1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}} (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0)} \approx \hat{r} \left\{ 1 \mp \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right\} \end{aligned}$$

(ここに、 $\hat{r} = (\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0) / (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0)$ は、偏光を考えないときのフレネル係数です)

が得られますから、式(3.81)に代入すると式(3.82)となります。

$$\Phi_K = i \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+} \right) = i \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\hat{r} \left( 1 + \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right)}{\hat{r} \left( 1 - \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right)} \right) \approx i \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{i2n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right) \approx \frac{n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})}$$

(3.82)

# テーラー展開による近似

- (3.82)を導くにあたって、 $x$ が小さいとき成立する次の近似式を使いました。

$$\sqrt{1+x} \approx 1+x/2,$$

$$1/(1+x) \approx 1-x,$$

$$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$$

$$\ln(1+x) \approx x$$



# 複素カ一回転を誘電率で表す(2)

- この式の対角成分 $\varepsilon_{xx}$ を光学定数 $n, \kappa$ によって表すと,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = (n^2 - \kappa^2) + i2n\kappa$$

と書けますから, (3.81)に代入して整理することによって, 次のような面倒な式を得ます。

$$\theta_K = n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2\}} \quad (3.83)$$
$$\eta_K = n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2\}}$$

カ一回転角・楕円率は $\varepsilon'_{xy}$ と $\varepsilon''_{xy}$ の1次結合で表される。

# 自習課題

(今回提出する必要はありませんが中間評価の課題にします。)

- 式(3.81)から式(3.82)を導いてください。

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.82)$$

- 式(3.82)から式(3.83)を導いてください。

$$\begin{aligned} \theta_K &= n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \right\}} \\ \eta_K &= n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \right\}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

# 複素力一回転を誘電率で表す(3)

- 真空中から光が入射する場合、 $n_0=1$ として、下の式で書けます。

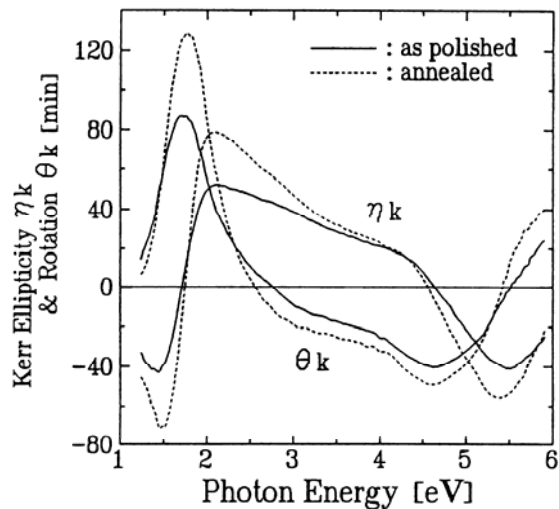
$$\theta_K = \frac{n(1-n^2+3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(1-3n^2+\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2+\kappa^2)\left((1-n^2-\kappa^2)^2+4\kappa^2\right)}$$
$$\eta_K = \frac{-\kappa(1-3n^2+\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(1-n^2+3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2+\kappa^2)\left((1-n^2-\kappa^2)^2+4\kappa^2\right)}$$

(3.83')

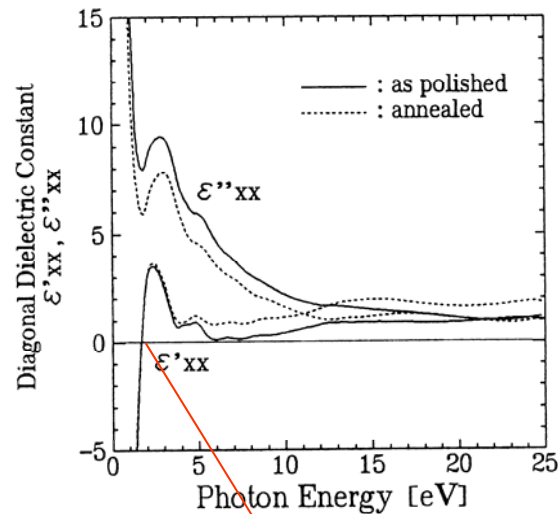
# プラズマ・エンハンス $\Phi_K \approx \frac{\epsilon_{xy}}{(1 - \epsilon_{xx})\sqrt{\epsilon_{xx}}}$

- いままで述べたように、複素カー回転角は誘電率の非対角成分だけでなく、対角成分にも関係します。
- プラズマ振動数においてエンハンス(増大)が起きます。
- 例: PtMnSb単結晶のカー回転スペクトルのピーク

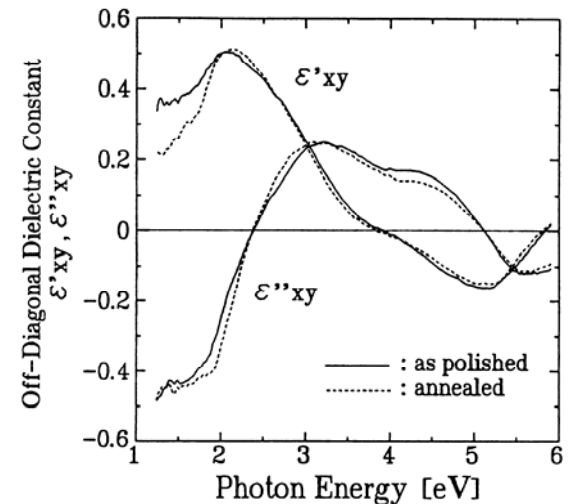
カー回転 $\theta_K$ と楕円率 $\eta_K$



誘電率対角成分



誘電率非対角成分



# 斜め入射の極力一効果の式

- 入射角  $\varphi_0$  で斜め入射した直線偏光の極力一複素回転角  $\Phi$  は、

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left( \cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left( \cos \varphi_2 - \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.88)$$

であらわすことができます。ここに  $\varphi_2$  は媒体内への屈折角です。

$\varphi_0$  と  $\varphi_2$  との間にはスネルの法則が成立します。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

# 縦カー効果の式

- 入射角 $\varphi_0$ で入射した直線偏光の受ける複素カー効果は、次式で表されます。

$$\tan \Phi_K = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\varepsilon_{xx} \left( \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2 \right) \left( \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.91)$$

$\varphi_0$ と $\varphi_2$ の間にはスネルの法則が成立します。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

## 2.2.4のまとめ

- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果が生じた誘電率テンソルの対角・非対角成分で表されることを学びました。

## 2.2のまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の屈折率 $N$ は与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します。(ここに、 $\varepsilon_{xx}$ は誘電率テンソルの対角成分、 $\varepsilon_{xy}$ は非対角成分です。)もし、 $\varepsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じません。
- 長さ $z$ の磁性体におけるファラデー回転角 $\theta_F$ およびファラデー楕円率 $\eta_F$ は、左右円偏光に対する屈折率の差 $\Delta n$ および消光係数の差 $\Delta \kappa$ を用いて表すことができます。
- さらに、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。
- また、磁化が光の進行方向に対して垂直なフォークト配置ではコットンムートン効果という磁気複屈折現象が生じることを学びました。
- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果も誘電率テンソルの非対角成分を分子とし、対角成分を用いた $\varepsilon_{xx}(1 - \varepsilon_{xx})^{1/2}$ を分母とする分数で表されます。