

# 基礎から学ぶ光物性

## 第3回 光が物質の表面で反射されるとき:



東京農工大学特任教授  
佐藤勝昭

## 第3回講義で学ぶこと

- この講義では、物質の表面で光が反射されるときに起きる光学現象について述べます。
- この講義では結果をさきに述べます。式の誘導は、最後に付録として付けますので、きちんと理解したい人は、付録までつきあってください。

# 光の屈折と反射

- 光が2つの異なる媒体の間を通り抜けるときどのような現象が起きるかをのべます。
- よく知られているように誘電率の異なる媒体の界面では反射がおきるとともに、光が界面に斜めに入射すると屈折が起きます。
- 一般に反射の際には光の位相の変化も起きます。反射率や位相の変化は媒体の屈折率と消光係数を使って記述できます。

- 物質表面に光が入射するとき、界面をはさんで入射光・反射光側と透過光側の間には波数ベクトルの界面に平行な成分の連続性および、電界と磁界の界面に平行な成分の連続性が成り立ちます。
- これから屈折の法則、反射の法則が導かれます。

- 光が斜め入射するとき、偏光の向きが入射面に垂直か、面内にあるかで反射率や反射の際の位相の飛びが異なります。この性質を使って物質の屈折率や消光係数さらには薄膜の厚さなどを精密に求めることができます。この技術はエリプソメトリと呼ばれています。

# 目次

1. 偏光とは
2. 入射面、p偏光、s偏光の定義
3. 光の屈折の法則(スネルの法則)
4. 光が斜めに入射するときの反射の法則
  1. ブリュースター角
  2. エリプソメトリ
5. 光が垂直入射するときの反射の法則
6. 反射スペクトルから吸収スペクトルを求める  
クラマース・クローニヒの関係
7. 全反射とエバネッセント波
8. 付録1: 光の反射・屈折の式の誘導
9. 付録2: クラマース・クローニヒの式の数学的説明

# 1. 偏光とは？

- 前回の授業で扱ったように光は電磁波です。
- 電磁波には時間とともに振動する電界と磁界があって、それらが空間的にも振動しながら伝わっていきます。電界も磁界も大きさと向きをもっておりベクトルで表されます。電界ベクトルと磁界ベクトルの向きは互いに直交しています。
- 電界(または磁界)ベクトルの振動の向きが一定の面内にある場合を直線偏光とよびます。

# 光の偏り(偏光)

- 光は電磁波です。
- 電界ベクトル $E$ と磁界ベクトル $H$ は直交しています。
- 磁界 $H$ を含む面を偏光面、電界 $E$ を含む面を振動面といいます。

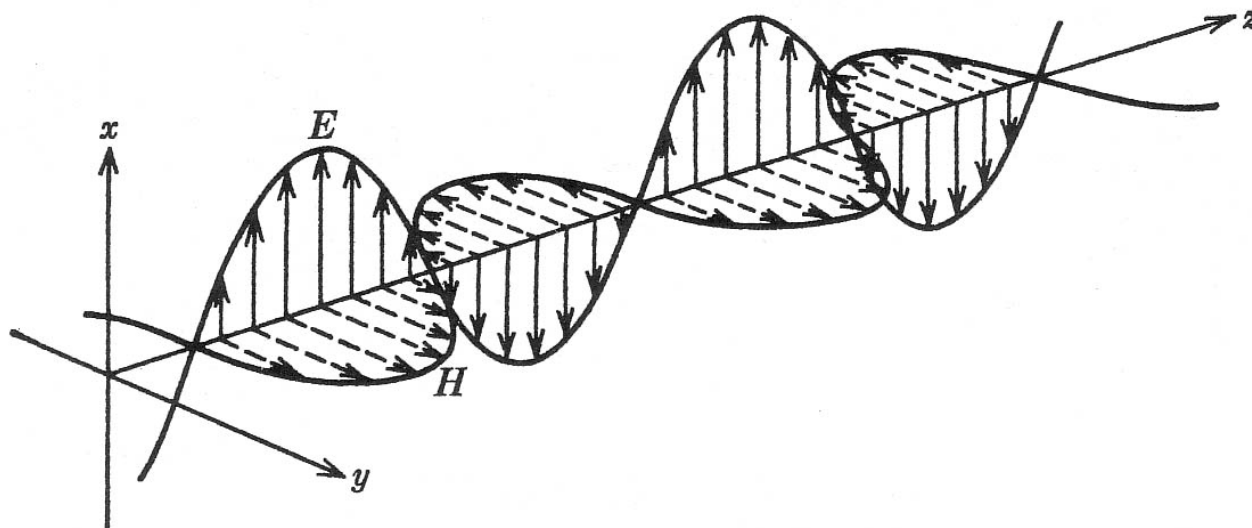


図 2.1 電磁波の電界ベクトル( $E$ )と磁界ベクトル( $H$ )



# 偏光の発見

- 1808年, ナポレオン軍の陸軍大尉で技術者のE.L. Malus がパリのアンフェル通りの自宅の窓からリュクセンブル宮の窓で反射された夕日を方解石の結晶を回転させながら覗いていた時、偏光の概念を見出しました。

<http://www.polarization.com/history/history.html>



スケッチ  
リュクサンブル宮  
佐藤勝昭画

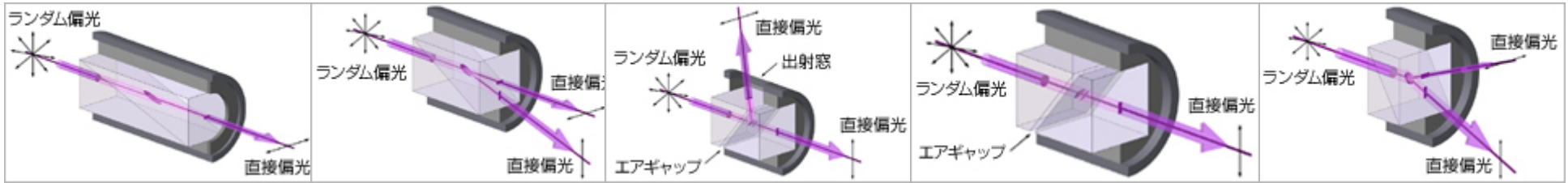
# 直線偏光

- 偏光面が一つの平面に限られたような偏光を直線偏光と呼びます。
- 偏光の向きが時間的空間的に一様に分布している光を自然光といいます。
- 自然光から直線偏光を取り出すための素子を直線偏光子といいます。
- 直線偏光子には、複屈折偏光子、線二色性偏光子、ワイヤグリッド偏光子、ブリュースタ偏光子などがあります。



# 偏光子

## ■ 複屈折(プリズム)偏光子



グラントムソン

ロシヨン

グランレーザー

グランテーラー

ウォラストン

光学技研の製品情報(偏光子) <http://www.KogaKugiKen.co.jp/products/polarizer06.html>による

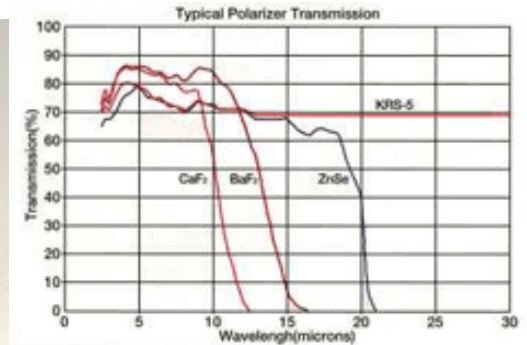
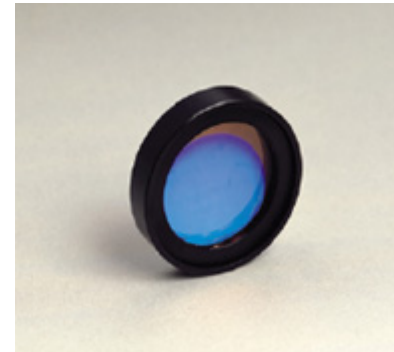
## ■ 二色性偏光子(偏光板)



メレスグリオの製品情報

<http://shop.mellesgriot.com/products/optics/optics.asp?plga=276736&CatID=10521&mscssid>による

## ■ ワイヤグリッド偏光子



オプトライン社の製品情報

[http://www.opto-line.co.jp/jp/henKo/henKo\\_seKigai.html](http://www.opto-line.co.jp/jp/henKo/henKo_seKigai.html)による

# 円偏光

- ある位置で見た電界(または磁界)ベクトルが時間とともに回転するような偏光を一般に楕円偏光といいます。
- 光の進行方向に垂直な平面上に電界ベクトルの先端を投影したときその軌跡が円になるものを円偏光といいます。円偏光には右(回り)円偏光と左(回り)円偏光があります。(どちらが右まわりでどちらが左まわりかは著者により定義が異なっているので注意。)

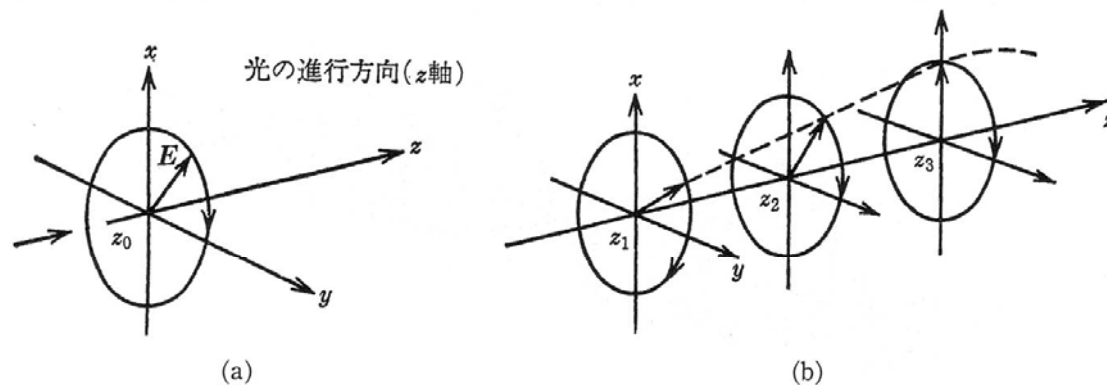


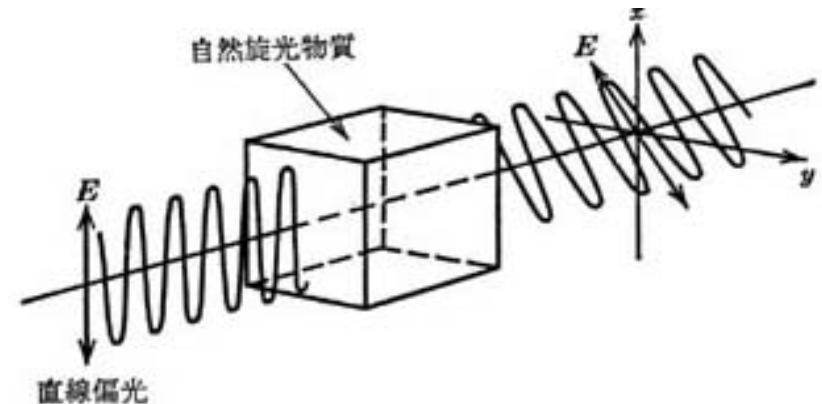
図 2.2 本書での定義による右円偏光

- (a) ある位置で光源を背にして見ると電界ベクトルが時間とともに右まわりに回転。  
(b) 時間を止めて電界ベクトルの軌跡をみると進行方向に左まわりになっている。

•円偏光は、直交する2つの直線偏光の合成で、両偏光の振動の位相の間に $90^\circ$ の差がある場合であると考えられます。

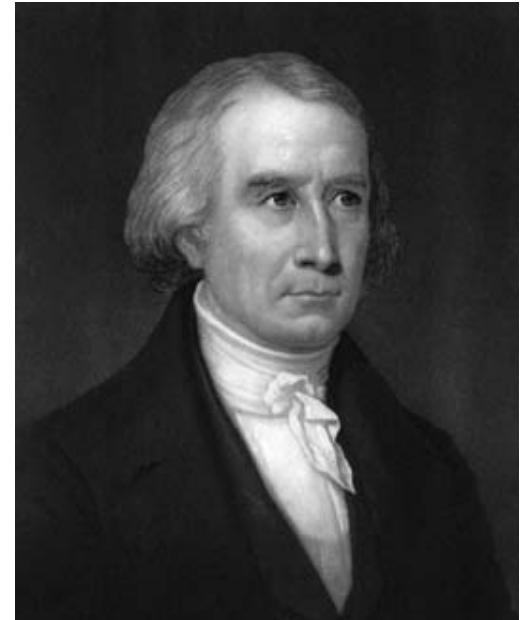
# 旋光性と円二色性

- 物体に直線偏光を入射したとき、透過してきた光の偏光面がもとの偏光面の方向から回転していたとすると、この物体は自然旋光性を持つといいます。
  - 水晶、ブドウ糖、ショ糖、酒石酸等
- これらの物質には原子の並びにらせん構造があって、これが旋光性の原因になります。



# 旋光性の発見

- 物質の旋光性をはじめて見つけたのは、フランスのArago(1786-1853)で、1811年に、水晶においてこの効果を発見しました。
- Aragoは天文学者としても有名で、子午線の精密な測量をBiot(1774-1862)とともにに行い、スペインでスパイと間違われて逮捕されるなど波瀾に満ちた一生を送った人です。ちなみに、Biotはビオ・サヴァールの法則の発見者の1人としても有名です。
- Aragoの発見は Biotに引きつがれ、旋光角が試料の長さに比例することや、旋光角が波長の二乗に反比例すること(旋光分散)等が発見されました。

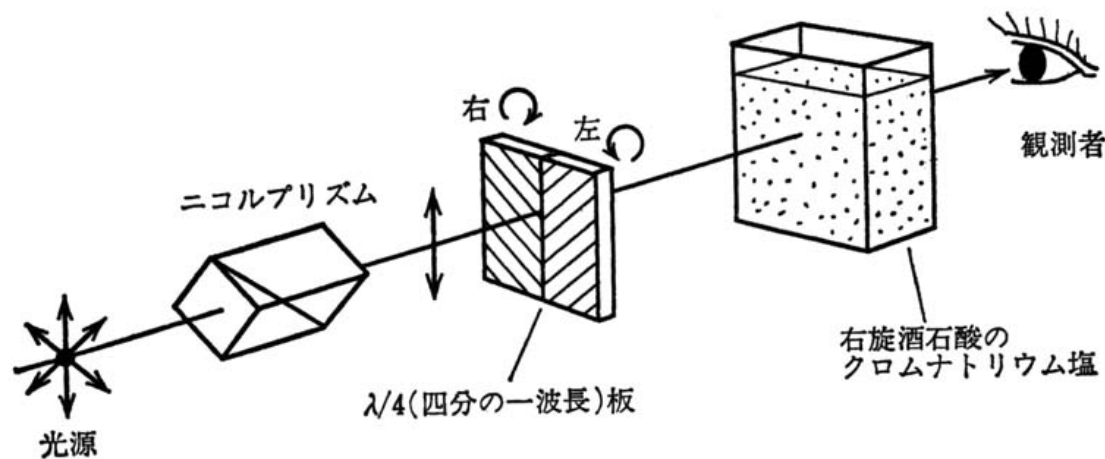


François Arago  
1786 - 1853



# 円二色性 (Circular dichroism: CD)

- 酒石酸の水溶液などでは、右円偏光と左円偏光とに対して吸光度が違うという現象があります。これを円二色性といいます。この効果を発見したのはCottonという人で1869年のことです。彼は下図のような装置を作って眺めると左と右の円偏光に対して明るさが違うことを発見しました。円二色性がある物質に直線偏光を入射すると透過光は楕円偏光になります。



図の番号は、「光と磁気」の図番です。

図 2.4 円二色性の観測法 (Cotton による)

# 光学活性

- 旋光性と円二色性とをあわせて、光学活性と呼びます。一般にこれらの性質は同時に存在します。
- 直線偏光を円二色性をもつ物質に入射すると、出てくる光は楕円偏光になります。
- 円二色性をもつ物質においては、旋光性は出円偏光の主軸の回転によって定義されます。
- 旋光性と円二色性は、後にご紹介するクラマースクローニヒの関係で結びついており、互いに独立ではありません。



## 2. 入射面、p偏光、s偏光の定義

- 図のような座標系を考えます。

XY面を境界面としてZの正負で媒質が異なるとします。面に垂直な線を法線と呼びます。

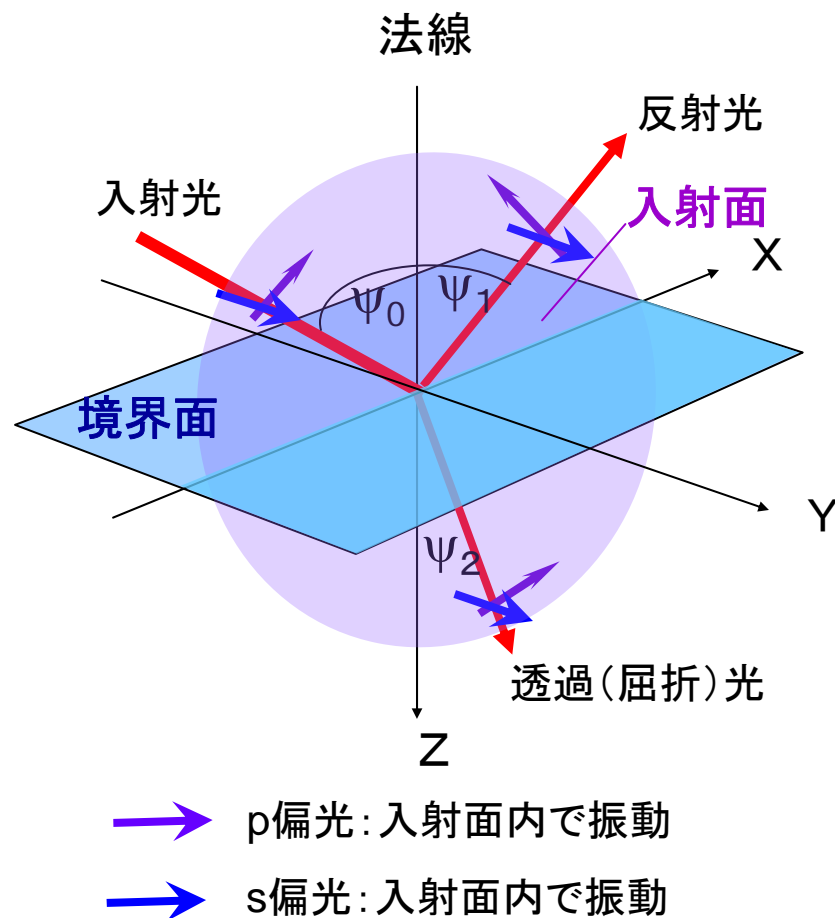
境界面に入射角  $\psi_0$  で光が入射します。

光の一部は境界面で反射し、一部は境界面を透過します。反射角を  $\psi_1$ 、透過光の屈折角を  $\psi_2$  とします。

境界面に垂直で入射光・反射光を含む面を入射面と呼びます。

入射面内で電界が振動する偏光をp偏光と呼びます。pはparallelを表します。

入射面に垂直に電界が振動する偏光をs偏光と呼びます。sはsenkrechtの頭文字で垂直を表すドイツ語です。



### 3. 光の屈折の法則 (スネルの法則)

- ここでは入射面について考えます。
- 波数ベクトルの界面成分の連続性から

$$K_{0x} = K_{1x} = K_{2x}$$

$$K_0 \sin \psi_0 = K_1 \sin \psi_1 = K_2 \sin \psi_2 \quad (1)$$

(1)より

$$\sin \psi_2 / \sin \psi_0 = K_0 / K_2 \quad (2)$$

マクスウェルの方程式より

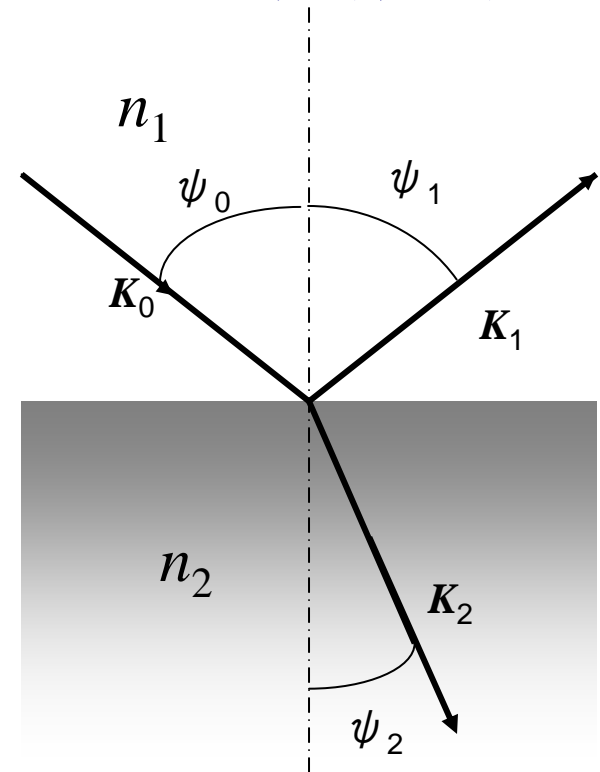
$$K_0 = K_1 = \omega \varepsilon_1^{1/2} / c = \omega n_1 / c$$

$$K_2 = \omega \varepsilon_2^{1/2} / c = \omega n_2 / c$$

これらを代入して(2)は

$$\sin \psi_2 / \sin \psi_0 = (\omega n_1 / c) / (\omega n_2 / c) = n_1 / n_2$$

となって、スネルの法則が得られます。



## 4. 光が斜めに入射するときの反射の法則

- 反射の際に光の振動電界が受ける振幅の反射率 $|r|$ と位相の変化 $\delta$ を複素数で表したものの $r=|r|e^{i\delta}$ をフレネル係数と称します。
- 斜め反射の場合、p偏光に対するフレネル係数 $r_p$ とs偏光に対するフレネル係数 $r_s$ は異なる値をとります。
- 光の強度(単位時間のエネルギー)は、電界の絶対値の2乗に比例します。

$$I=(\varepsilon/2)|E|^2$$

このため、光強度の反射率は、フレネル係数 $r$ の絶対値の2乗で表されます。 $R=r^*r=|r|^2$

これは実数で、普通に反射率といえはこれを指します。

- 当然ながら光強度の反射率もp偏光とs偏光に対して異なった値をとります。

# p偏光、s偏光に対するフレネル係数の式

- 入射光の波数を $K_0$ 、透過光の波数を $K_2$ 、入射角を $\psi_0$ 、出射(屈折)角を $\psi_2$ とすると、フレネル係数 $r_p = |r_p|e^{i\delta_p}$ 、 $r_s = |r_s|e^{i\delta_s}$ は

$$r_p = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2}$$

$$r_s = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2}$$

- $K_0$ 、 $K_2$ 、 $\psi_0$ 、 $\psi_2$ の間には、スネルの法則が成立する。すなわち、 $K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$ が成立するので上式は、

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} = \frac{\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_2}{\sin 2\psi_0 + \sin 2\psi_2} \\ &= \frac{\cos(\psi_0 + \psi_2) \sin(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 - \psi_2) \sin(\psi_0 + \psi_2)} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \end{aligned}$$

$$r_s = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2} = \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}$$

# ブリュースター角

$$R_p = \left| \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2$$

$$R_s = \left| \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2$$

- もし、 $\psi_0 + \psi_2 = \pi/2$ であれば、 $\tan$ が発散するため、 $R_p$ は0となります。
- このとき、反射光はS偏光のみとなります。
- このときの入射角をBrewster angle(ブリュースター角)といいます。

## フレネル係数を入射角 $\psi_0$ で記述

- スネルの法則を適用して  $\psi_2$  を  $\psi_0$  で表すことにより、フレネル係数を  $\psi_0$  で記述しますと、

$$r_p = \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}$$

$$r_s = \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}$$

# 光強度についての反射率 $R$

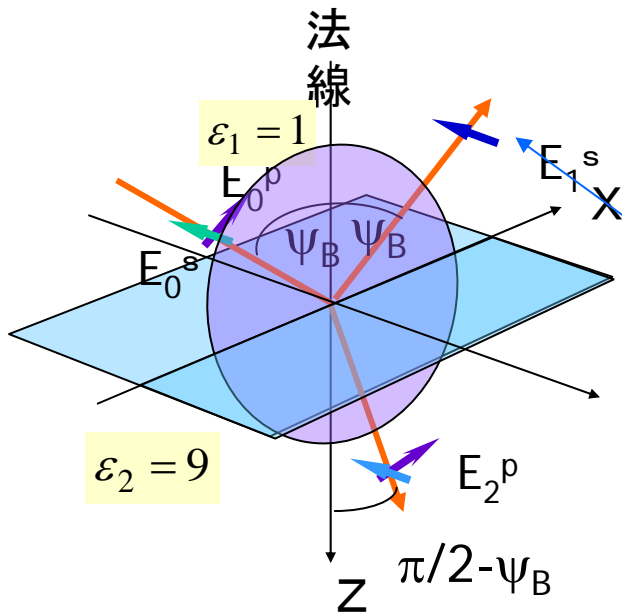
- 第1の媒体が真空、第2の媒体の複素屈折率が $N$ の場合についてp, s両偏光に対する反射率を求めると、下の式であらわされます。

$$R_p = \frac{\left| N^2 \cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0} \right|^2}{\left| N^2 \cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0} \right|^2}$$

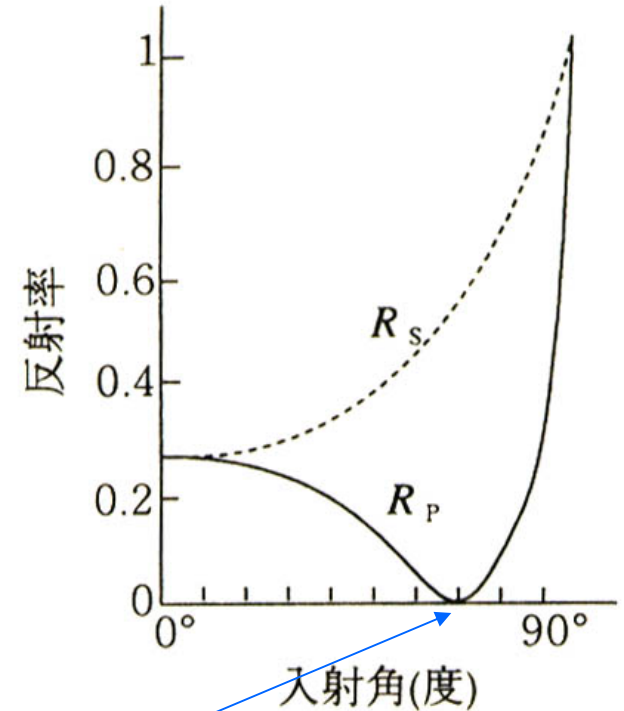
$$R_s = \frac{\left| \cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0} \right|^2}{\left| \cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0} \right|^2}$$

# 入射角に依存する反射率

- 式にもとづいて  $N=3+i0$  の場合について、 $R_p$ 、 $R_s$  をプロットすると右の図のようになります。
- $R_p$  は入射角  $71.5^\circ$  で0となっていることがわかります。この入射角がブリュースター角です。



斜め入射反射率( $n=3$ )

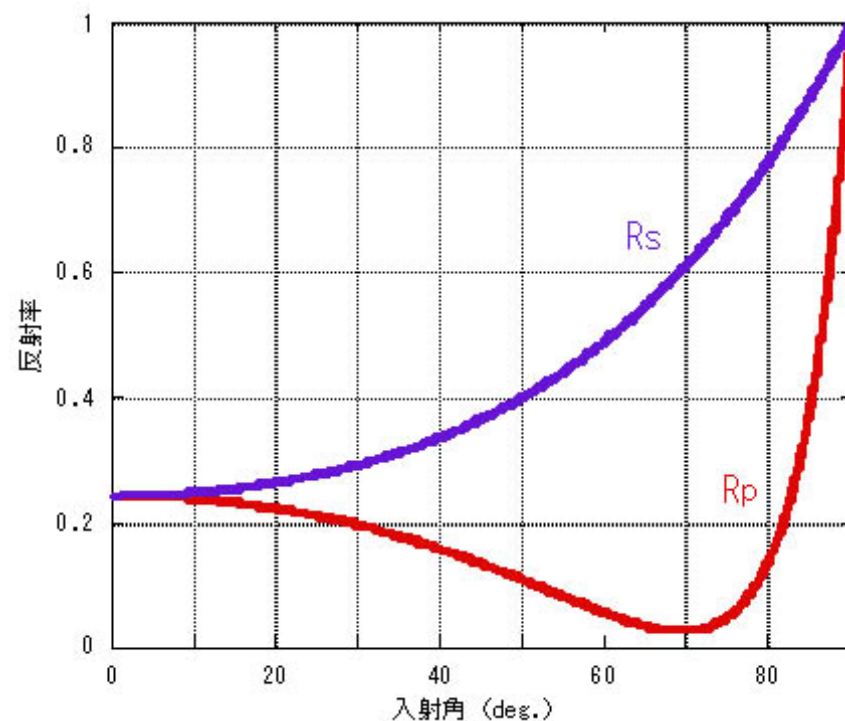


ブリュースター角のとき、s偏光のみが強く反射されます。



# 吸収のある媒体の斜め入射反射率

- 図は、複素屈折率が $N=2.5+i1.0$ の場合に計算した $R_p$ ,  $R_s$ の入射角依存性です。
- この場合、 $R_p$ は完全にはゼロになりません。つまり、金属での反射の場合、屈折率に虚数部があるために、 $R_p$ がゼロになるという意味でのブリュースター角は定義できないのです。



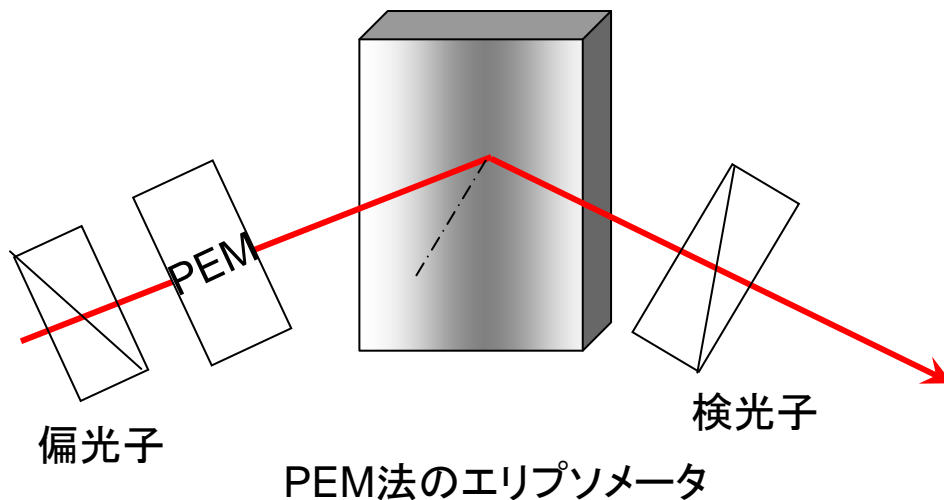
# エリプソメトリ(偏光解析)

$$\frac{r_s}{r_p} = -\frac{\cos(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 + \psi_2)} = \left| \frac{r_s}{r_p} \right| \exp(i\Delta) \equiv \tan \Psi \exp(i\Delta)$$

- $\Psi$  azimuth (方位角)
- $\Delta$  phase (位相差)
- 反射は方位角 $\Psi$ と位相差 $\Delta = \delta_p - \delta_s$ によって記述できます。
- 反射光は一般には楕円偏光になっていますが、そのp成分とs成分の逆正接角 $\Psi$ と位相差 $\Delta$ を測定すれば $\epsilon_r$ が求められます。(測定には1/4波長板と回転検光子を用います。)この方法を偏光解析またはエリプソメトリといいます。

# エリプソメトリ (ellipsometry)

- 空気中から、入射面から $45^\circ$ 傾いた直線偏光 ( $E_s = E_p$ ) を、誘電率  $\epsilon_r$  (複素屈折率  $N = n + i\kappa$ ) の媒体に入射する場合を考えましょう。反射光は一般には楕円偏光になっていますが、そのp成分とs成分の逆正接角  $\Psi$  と位相差  $\Delta$  を測定すれば  $\epsilon_r$  が求められます。この方法を偏光解析またはエリプソメトリといいます。



エリプソメトリのための測定装置をエリプソメータと呼びます。エリプソメータには、

- (1) 消光位置検出法
  - (2) 回転検光子法
  - (3) PEM (光弾性変調器) 法
- の3種類があります。

光源の波長を変えながらエリプソメトリを測定できるのが分光エリプソメータです。



## $\Psi, \Delta$ から $\varepsilon_r', \varepsilon_r''$ および $n, \kappa$ を求める

$\Psi, \Delta$  から次式で  $\varepsilon_r', \varepsilon_r''$  が求められます。

$$\varepsilon_r' = \frac{\sin^2 \psi_0 \tan^2 \psi_0 (\cos^2 2\Psi - \sin^2 2\Psi \sin^2 \Delta)}{(1 + \sin 2\Psi \cos \Delta)^2} + \sin^2 \psi_0$$

$$\varepsilon_r'' = \frac{\sin^2 \psi_0 \tan^2 \psi_0 \sin 4\Psi \sin \Delta}{(1 + \sin 2\Psi \cos \Delta)^2}$$

$\varepsilon_r', \varepsilon_r''$  が求まると次式で  $n, \kappa$  が求められます。

$$n^2 = (|\varepsilon_r| + \varepsilon_r') / 2, \quad \kappa^2 = (|\varepsilon_r| - \varepsilon_r') / 2$$

$$\text{ここに、} |\varepsilon_r| = \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2}$$

## 分光エリプソメトリで膜厚が決まるのはなぜ

- エリプソメトリで求めた薄膜の $\Psi$ 、 $\Delta$ のスペクトルは、膜の表面と裏面での多重反射と干渉の効果を含んでいる「見かけ」のものであります。
- 真の屈折率・消光係数の波長依存性と膜厚を仮定してシミュレーションを行い、実験で得られたスペクトルと最も一致する膜厚を求めるようなソフトウェアが組み込まれているのです。
- 従って、場合によっては、真の光学定数を一意的に決められないこともあるのです。

## 5. 光が垂直入射するときの反射の法則

- 垂直入射の場合、 $\psi_0=0$ 、従って $\psi_1=0$ 。  
このとき電界に対するフレネル係数 $r$ として、

$$\hat{r} = \hat{r}_p = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} = \frac{N_2 - N_0}{N_2 + N_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

を得ます。これより、媒質1が真空( $N_0=1+i0$ )のとき

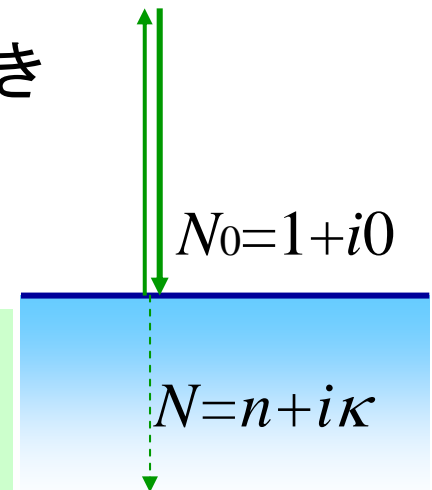
$$r = \frac{N - 1}{N + 1} = \frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1} \equiv \sqrt{R} \exp(i\theta)$$

を得ます。

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_2} - 1}{\sqrt{\epsilon_2} + 1} \right|^2$$

ここに

$$R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1^2}$$



# 垂直入射の光強度反射率と位相

- $R=r^*r=|r|^2$ は光強度の反射率、 $\theta$ は反射の際の位相のずれを表します。

$$R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1}$$

逆に解いて

$$n = \frac{1-R}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta}$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{R}\sin\theta}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta}$$

Rを誘電率で表すと

## 6. 反射スペクトルから吸収スペクトルを求める

- 反射スペクトル $R(\omega)$ を広いエネルギー範囲で測定すると、数学的な解析を使って、位相シフトのスペクトル $\theta(\omega)$ を求めることができます。
- 物理の応答を表す量の実数部と虚数部の間には、クラマースクローニヒの関係が成り立ちます。



## クラマース・クローニヒの関係式

- 応答を表す物理量の実数部と虚数部の間には次の関係式が成立します。（ $P$ は積分の主値を表す。）

$$\varepsilon'_{ij}(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon''_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

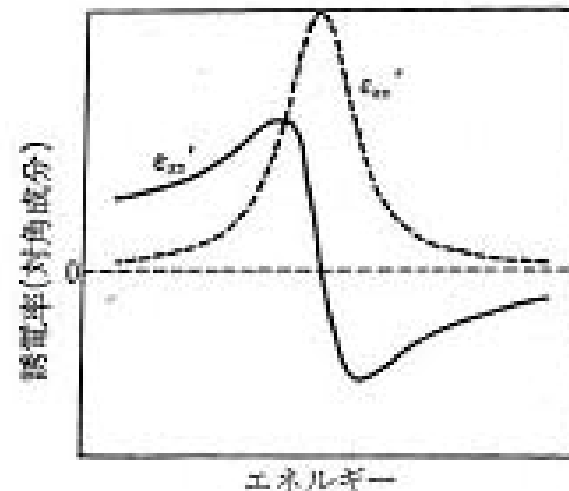
$$P \int_0^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\omega - \rho} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\omega + \rho}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

# KK変換の微分性

- 第2式を部分積分すると

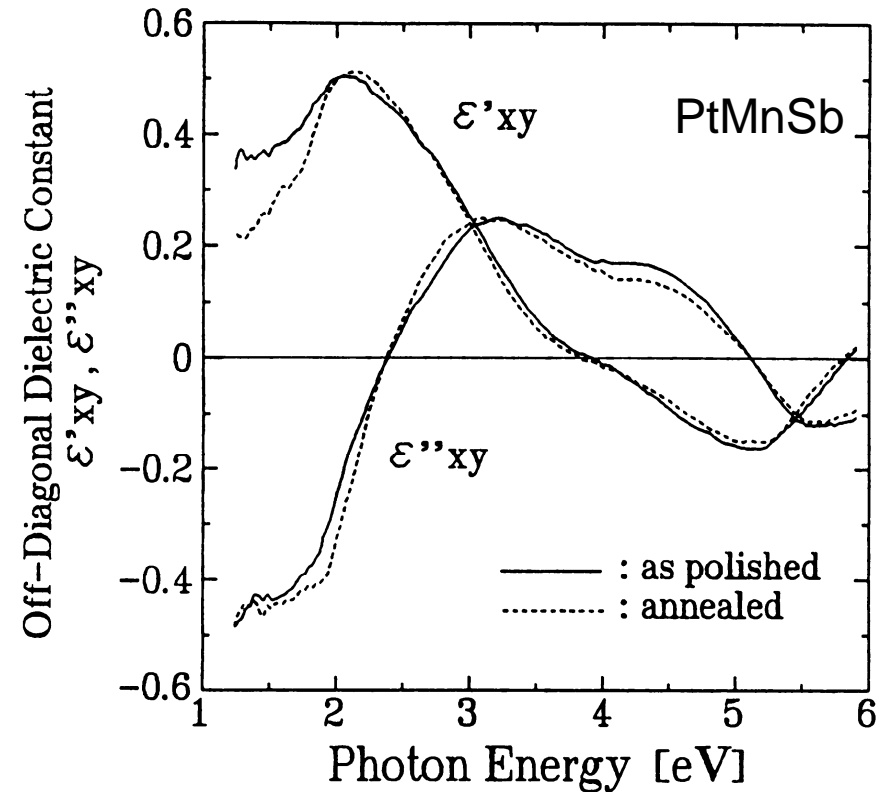
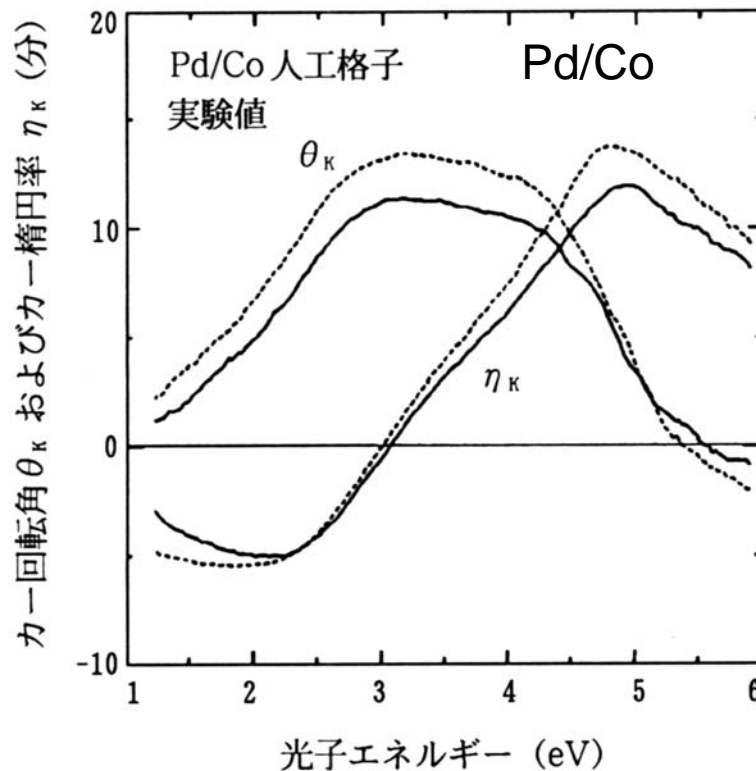
$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \varepsilon'_{ij}(\omega') \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \frac{d\varepsilon'_{ij}(\omega')}{d\omega'} d\omega' \quad (3.76)$$

- 右辺の第1項は0なので、結局第2項のみとなります。被積分関数は $\omega' \sim \omega$ 付近で大きい値をとるので、 $\varepsilon''$ は $\varepsilon'$ の微分形に近いスペクトル形状を示すこととなります。
- $\varepsilon'$ がピークを持つ $\omega$ では $\varepsilon''$ は急激に変化し、 $\varepsilon'$ が急激に変化する $\omega$ 付近で $\varepsilon''$ は極大（または極小）を示します。



# クラマースクローニヒ変換の微分性(磁気光学)

- クラマース・クローニヒの微分関係は、磁気光学スペクトルの回転角と楕円率の関係や、誘電率の非対角成分の実数部と虚数部の関係にも成立します。



# クラマースクローニヒ関係式の反射率への適用

- フレネル係数 $r$ の対数をとると
$$\ln r = \ln(|r|e^{i\theta}) = \ln|r| + i\theta = (1/2)\ln R + i\theta$$
- この実数部 $(1/2)\ln R$ と虚数部 $\theta$ の間にもクラマース・クローニヒの関係式が成立します。

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

- 実際のスペクトルは、有限のエネルギー範囲しかないなので、その外側の領域は適当な外挿をします。

# R( $\omega$ ), $\theta(\omega)$ からn( $\omega$ ), $\kappa(\omega)$ を計算する

- 測定で得られたR( $\omega$ )とクラマースクローニヒ変換で得られた $\theta(\omega)$ をさきほど紹介した式に代入すると、屈折率n( $\omega$ )と消光係数 $\kappa(\omega)$ を計算することができます。
- 消光係数がわかれば、吸収係数 $\alpha(\omega)$ も求められます。

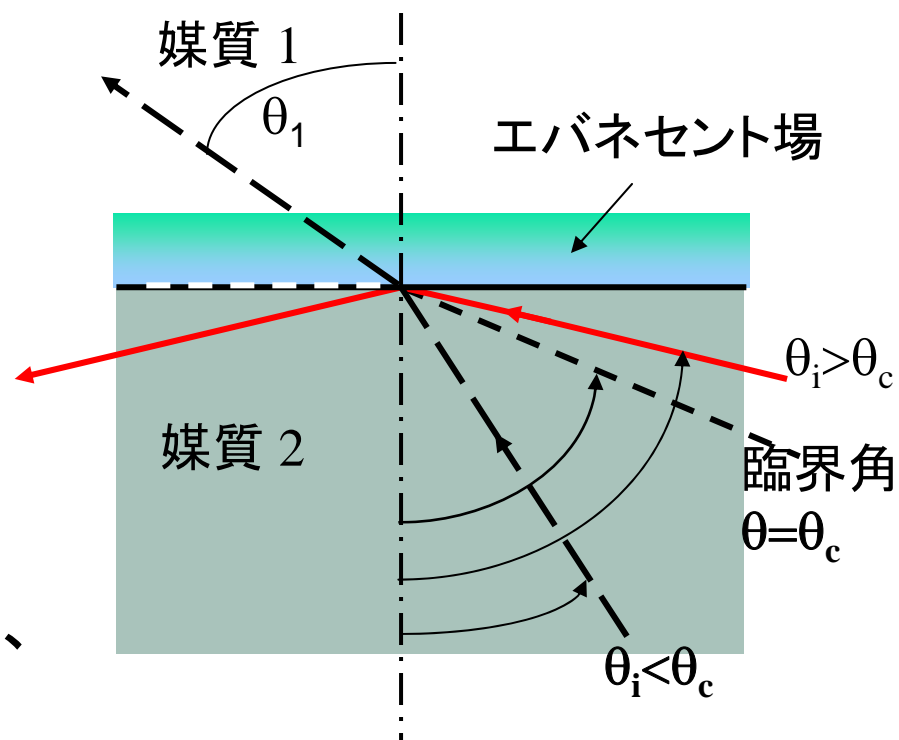
$$n = \frac{1 - R}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$
$$\kappa = \frac{2\sqrt{R} \sin \theta}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega\kappa}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$$

クラマースクローニヒの式を用いて求めた吸収係数の絶対値は、外挿法に依存する不確かさがあります。

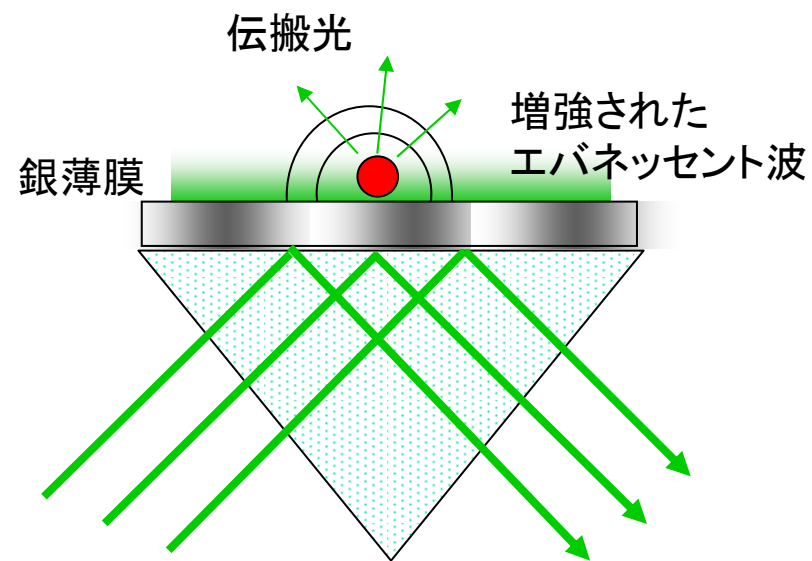
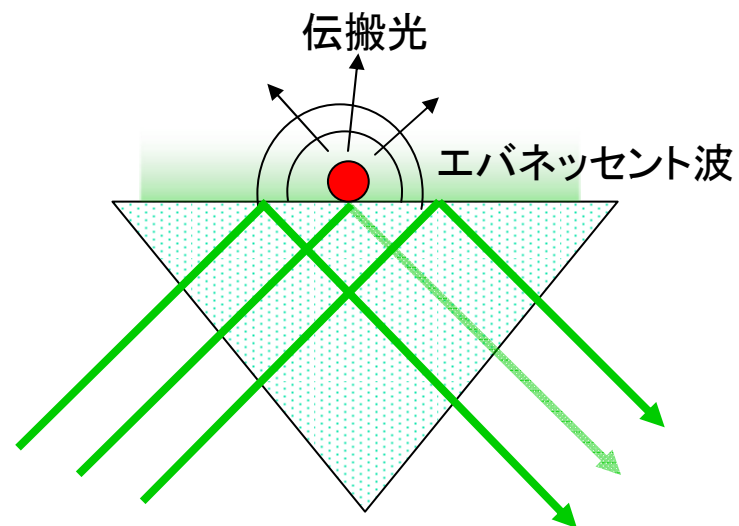
# 全反射とエバネッセント波

- 媒質1と媒質2が接しているとしします。媒質2の屈折率が媒質1の屈折率より大きいと仮定します。
- 光が媒質2から媒質1にすすむとき、入射角 $\theta_i$ が臨界角 $\theta_c$ より小さいときは図の上の点線のようにスネルの法則に従って屈折しますが、入射角が臨界角になると、出射角が90度となり、面内に沿って進みます。
- 入射角が臨界角を越えると、透過せず、赤線のように全反射が起きます。
- このとき、媒質1の表面には伝搬しない電磁波であるエバネッセント波が界面から波長程度の範囲に生じます。



# 全反射プリズム

- 全反射プリズムの反射面の外側にはエバネッセント波があります。この波は伝わらないで減衰する波ですが、ここに微小物体を置くと散乱光は伝搬光になり観測できます。
- 全反射プリズムの反射面に銀薄膜を堆積させると、エバネッセント波が表面プラズモン増強され微小物体が観測しやすくなります。



## 第3回のおわりに

- 斜め入射の反射率は、p偏光とs偏光とで異なります。
- 斜め入射の場合、p偏光の反射率が0になる入射角があり、ブリュースター角といいます。
- 金属ではp偏光は完全にはゼロになりません。
- エリプソメトリを使って、屈折率・消光係数を求めることができます。
- クラマースクローニヒの関係を使うことによって反射スペクトルから吸収スペクトルを求めることもできます。



## 付録1：反射の式の誘導の仕方

- 本文では、式の誘導は面倒なのではしなかったのですが、詳しく知りたい方のために、誘導しておきましょう。

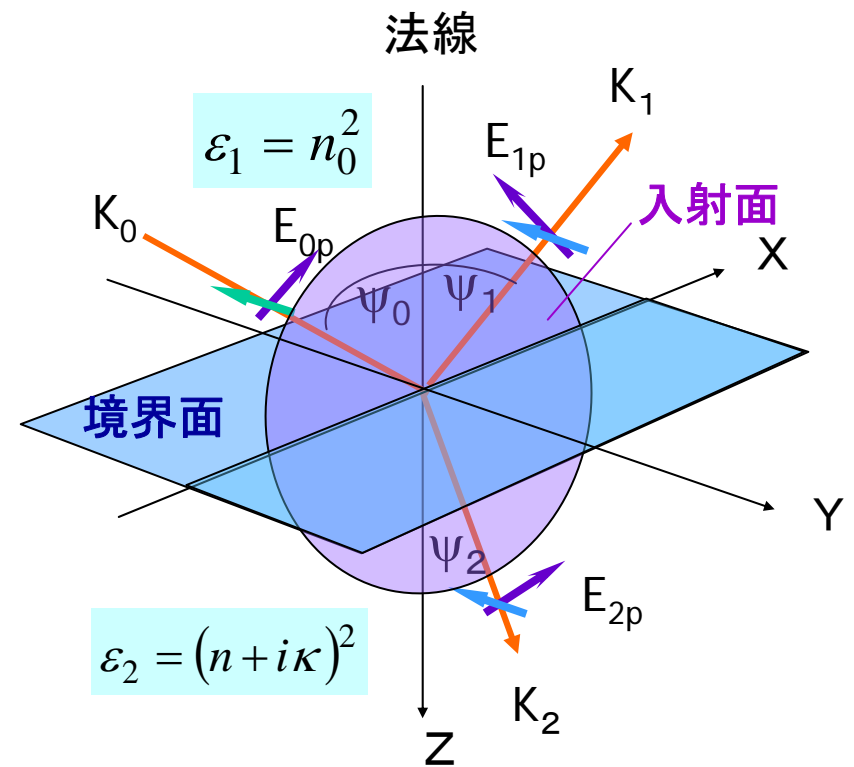
# 斜め入射の場合の反射

- 図において、入射面(入射光と法線を含む面)を $xz$ としたとき、この面に垂直な電界ベクトルの成分( $y$ 成分)を $E_s$ のように垂直を意味するドイツ語senkrechtの頭文字のSをつけて表し、入射面内の成分を $E_p$ のようにP(parallel)をつけて表します。入射側には下付の添え字0をつけ、反射光には1、屈折光には2をつける。 $x$ 成分、 $y$ 成分をP成分、S成分を使って表しますと

$$E_{0x} = E_0^P \cos \psi_0, E_{0y} = E_0^S$$

$$E_{1x} = -E_1^P \cos \psi_0, E_{1y} = E_1^S \quad (A1)$$

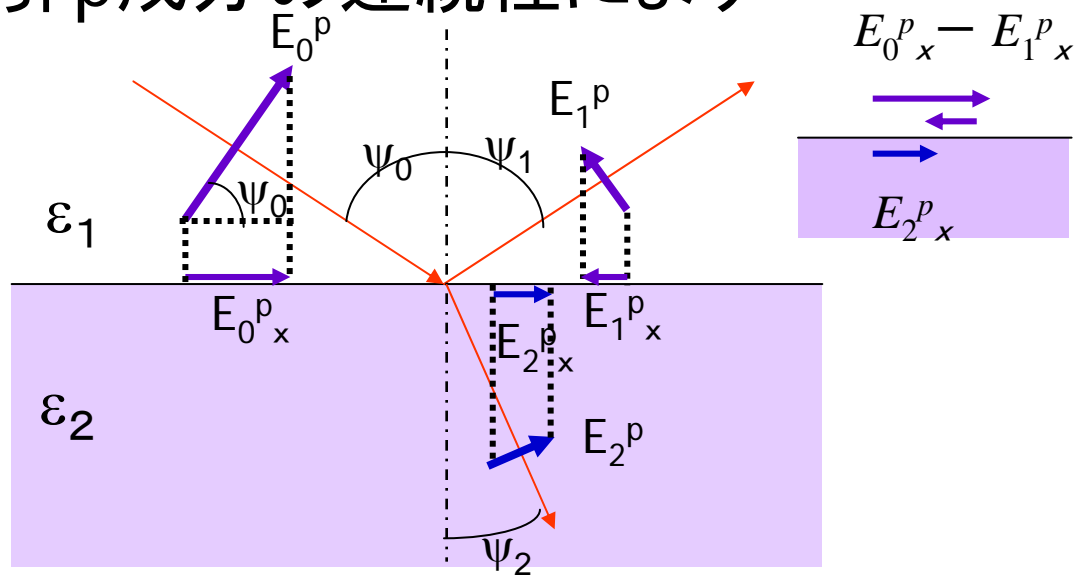
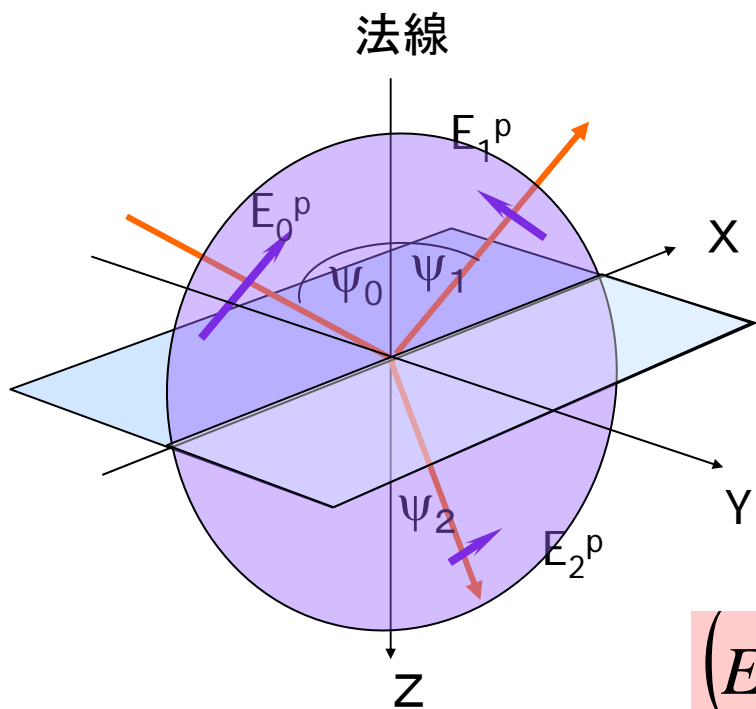
$$E_{2x} = E_2^P \cos \psi_2, E_{2y} = E_2^S$$



図

# 電界・磁界の界面における連続性(1)

- 界面における電界p成分の連続性により

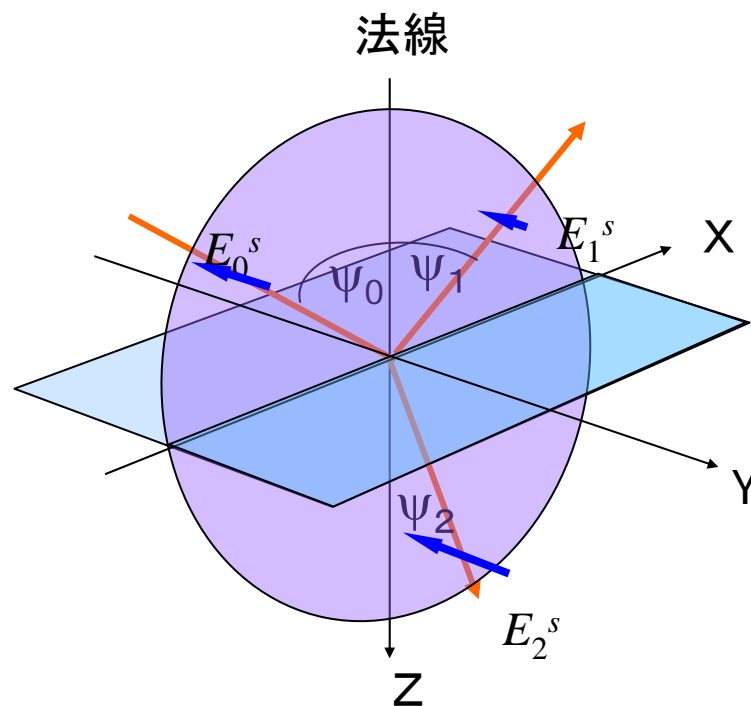
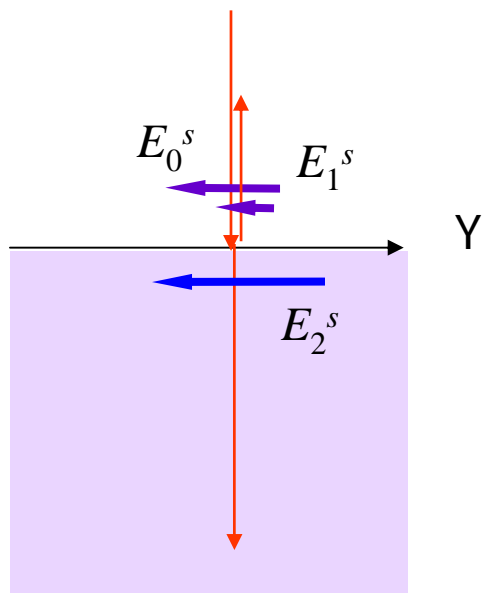


$$\left(E_0^P - E_1^P\right) \cos \psi_0 = E_2^P \cos \psi_2 \quad (\text{A2})$$

# 電界・磁界の界面における連続性(2)

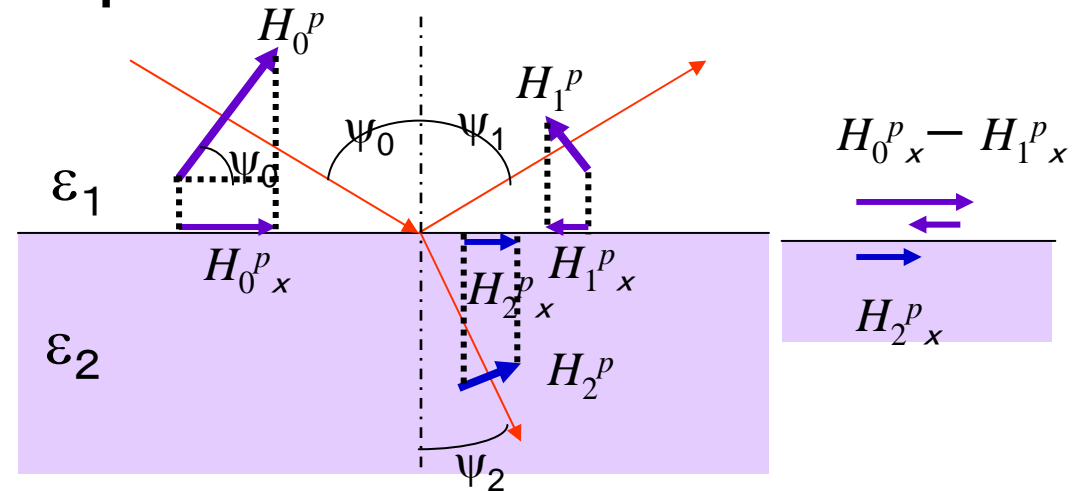
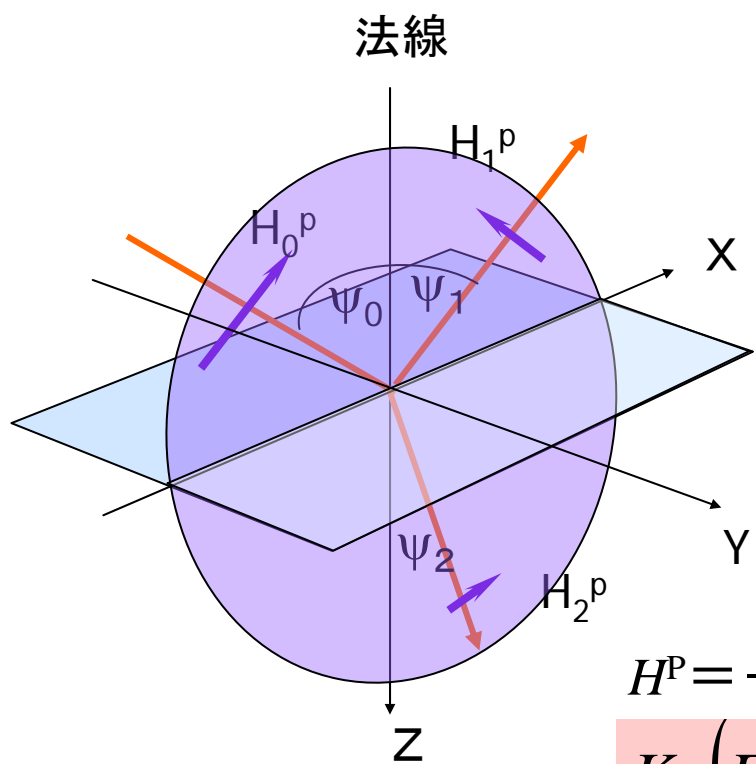
- 界面における電界s成分の連続性は次式で表されます。

$$E_0^S + E_1^S = E_2^S \quad (\text{A3})$$



# 電界・磁界の界面における連続性(3)

## ■ 界面における磁界p成分の連続性



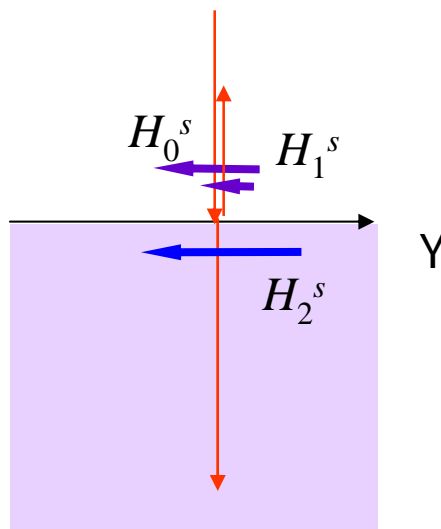
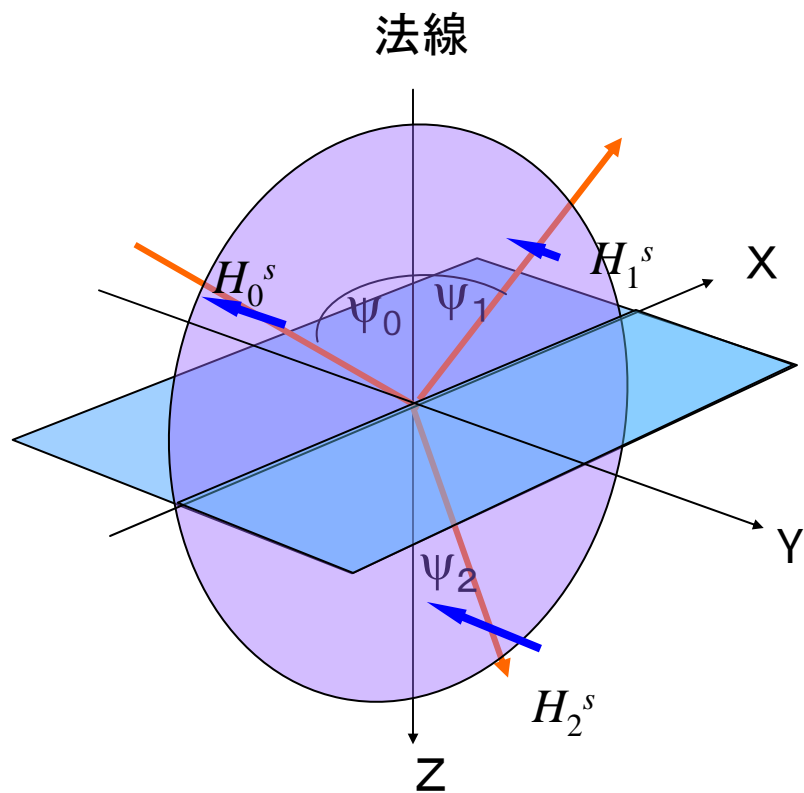
$$(H_0^P - H_1^P) \cos \psi_0 = H_2^P \cos \psi_2 \quad (\text{A4})$$

$H^P = -(K/\omega\mu_0)E^S$ によって電界についての式に書き直す

$$K_0(E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 = K_2 E_2^S \cos \psi_2 \quad (\text{A5})$$

# 電界・磁界の界面における連続性(4)

## ■ 界面における磁界s成分の連続性



$$H_0^S + H_1^S = H_2^S$$

(A6)

$H^S = (K/\omega\mu_0)E^P$ によって  
電界についての式に書き直します。

$$K_0(E_0^P + E_1^P) = K_2E_2^P \quad (A7)$$

# 電界と磁界の界面における連続性(5)

$$(E_0^P - E_1^P) \cos \psi_0 = E_2^P \cos \psi_2 \quad (\text{A2})$$

$$E_0^S + E_1^S = E_2^S \quad (\text{A3})$$

$$K_0 (E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 = K_2 E_2^S \cos \psi_2 \quad (\text{A5})$$

$$K_0 (E_0^P + E_1^P) = K_2 E_2^P \quad (\text{A7})$$

連立方程式を解く

- $E_2^P$ を消去

$$(K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2) E_0^P - (K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2) E_1^P = 0$$

- $E_2^S$ を消去

$$(K_2 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0) E_0^S + (K_2 \cos \psi_2 - K_0 \cos \psi_0) E_1^S = 0$$

# 複素振幅反射率(フレネル係数)

フレネル係数

P偏光の反射

$$\begin{aligned}
 r_p &= \frac{E_1^P}{E_0^P} = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} \\
 &= \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)}
 \end{aligned}
 \tag{A8}$$

S偏光の反射

$$\begin{aligned}
 r_s &= \frac{E_1^S}{E_0^S} = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} \\
 &= \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}
 \end{aligned}$$

ここに、 $r_p = |r_p| e^{i\delta_p}$ 、 $r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$ です。

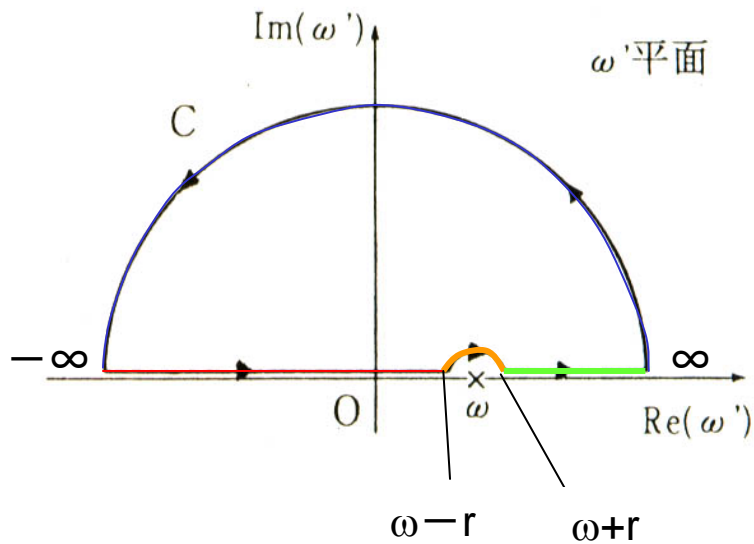




## 付録2:

# クラマースクローニヒ関係の数学的説明

- 線形応答関数  $f(\omega)$  が、図に示す  $\omega$  の複素平面の上半面内で正則、かつ上半面で  $|\omega| \rightarrow \infty$  において  $|f(\omega)| \rightarrow 0$ 、さらに実数  $\omega$  に対し  $f'(-\omega) = f'(\omega)$ 、 $f''(-\omega) = -f''(\omega)$  であるような性質を持っておればよい。このような条件が成り立つとき、**コーシーの積分公式** によって  $\pi i f(\omega) = \oint d\omega' f(\omega') / (\omega' - \omega)$  が成立します。



$$\oint \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega = 0 \quad (B1)$$

$-i\pi f(\omega)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega-r} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i f(\omega + re^{i\theta}) d\theta$$

$$+ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\omega+r}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} i f(Re^{i\theta}) d\theta = 0$$

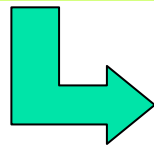
$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - \pi i f(\omega) = 0 \quad (B2) \quad 0$$

## つづき

- $f(\omega) = f'(\omega) + if''(\omega)$  を代入し、両辺の実数部、虚数部がそれぞれ等しいとおくことによって導くことができます。
- $\omega$  の複素平面の上半面内で正則、かつ、上半平面で  $|\omega| \rightarrow \infty$  において  $|f(\omega)| \rightarrow 0$  という条件は、 $t=0$  において外場が加えられたときの応答は  $t>0$  におきるという因果律に対応しています。

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\pi i f(\omega) \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\omega') + if''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \pi i (f'(\omega) + if''(\omega)) = -\pi (f''(\omega) - if'(\omega))$$

$$\begin{aligned} -\pi f''(\omega) &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_{-\infty}^0 \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_0^{\infty} \frac{f'(-\omega')}{-\omega' - \omega} d(-\omega') + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= -P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 2\omega P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$



$$f''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

(B3)