

工学系12大学大学院単位互換 e-Learning科目  
磁気光学入門第4回 電磁気学に基づく磁気光学の理論(2)  
マクスウェルの方程式

佐藤勝昭

東京農工大学

- 電磁気学に基づく光と磁気の理論(1)
  - 円偏光と磁気光学効果について学びました。
  - 光と物質の結びつきを誘電率テンソルで表されることを学びました。

# 第4回に学ぶこと

- 今回は光と磁気第3章3.3と3.4に沿ってお話しします。
- 光の伝搬とマクスウェルの方程式
  - 固有解: 波動解、固有値: 複素屈折率
- ファラデー配置の場合の固有値と固有状態
  - 2つの固有値と対応する固有状態(円偏光)
- ファラデー効果の現象論
  - ファラデー効果と誘電率テンソル
- フォークト配置の場合の固有値と固有状態
  - コットンムートン効果: 磁気誘起の複屈折

# マクスウェルの方程式

- 光の電界ベクトルを $E$ 、電束密度ベクトルを $D$ 、磁界ベクトルを $H$ 、磁束密度ベクトルを $B$ 、電流を $J$ とすると、次の関係が成立します。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

(SI単位系)

# マクスウェル方程式をEとHで表す

- 簡単のため、 $J=0$ と置きます。

[つまり、伝導電流を分極電流(変位電流)の中に繰り込みます]

- $B$ と $H$ 、 $D$ と $E$ の関係式が得られます。

$$B = \mu_0 H$$

$$D = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 E$$

誘電率テンソル

- (3.17)に代入すると次の関係式が得られます。

$$\begin{aligned} \text{rot } E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{rot } H &= \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

式(3.18)においては、微分方程式が2個、変数もEとHの2個ですから、解を求めることができます。

# マクスウェル方程式を解く: 2つの方法

1. 1つは、第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替え、 $\partial H / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動式を代入し、 $E$ についての2次方程式を得ます。
2. もう1つは、 $E$ と $H$ に先に $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動関数を代入し、通常の変立1次方程式にします。ここで $H$ を消去すると $E$ についての2次方程式を得ます。(教科書「光と磁気」では後のやり方を使っています。)

# マクスウェル方程式を解く [1]

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.18)$$

- 第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替え、 $\partial \mathbf{H} / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動式を代入し、Eについての2次方程式を得ます。

# マクスウェル方程式を解く [1]-1

- (3.18)の第2式の両辺を $t$ で偏微分します。

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- $\partial / \partial t$ とrotの順番を入れ替えます。

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- ここに(3.18)の第1式

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{E} \quad \text{を代入します。}$$

# マクスウェル方程式を解く [1]-2

これより  $\text{rot}\left(-\frac{1}{\mu_0}\text{rot } \mathbf{E}\right) = \tilde{\epsilon}\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$  が得られ、

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon}\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \text{ となります。}$$

ここで、 $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  という関係を用いました。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \text{ をマクスウェルの方程式と いうことがあります。}$$

# マクスウェル方程式を解く [1]-3

- ここで、rot、grad、divの間に成り立つ次の公式を用います。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

- この結果Eについての2階の微分方程式が得られます。

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\varepsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- この式に次の波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入するとEについての方程式(3.20)が得られます。

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

# 自習課題(1) [提出の必要はありません]

- 始めにrot Aにrotを及ぼすとどうなるか確かめてください。(物理数学などで学んだはずです)  
 $\text{rot rot } A = \nabla \times (\nabla \times A) = \text{grad}(\text{div}A) - \nabla^2 A$

- 次に、

$$\text{grad div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

に波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入し

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0$$

が成立することを確かめてください。

# マクスウェル方程式を解く [2]

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.18)$$

- $E$ と $H$ に、 $\exp(-i\omega t + iKr)$ の形の波動関数を代入し、通常の変立1次方程式にします。ここで $H$ を消去すると $E$ についての2次方程式を得ます。

# マクスウェル方程式を解く [2]-1

- ここでは、微分演算を使わない方法を紹介します。EおよびHについての波動の式は、波数ベクトル $K$ として

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(iK \cdot r) \\ H &= H_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(iK \cdot r) \end{aligned} \quad (3.19)$$

のように表すことができます。ここに $E_0$ ,  $H_0$ は時間や距離に依存しない定数ベクトルです。

- 式(3.19)をマクスウェルの方程式(3.18)に代入すると、

$$K \times E = \omega\mu_0 H$$

$$K \times H = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 E$$

となります。

# マクスウェル方程式を解く [2]-2

- 両式から $H$ を消去し、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \times \frac{1}{\omega\mu_0} (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega\tilde{\epsilon}\epsilon_0 \mathbf{E}$$

固有方程式として

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

が得られます。

ここに $\mathbf{K}$ は波数ベクトルです。

## 自習課題(2) [提出の必要はありません]

- 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導いてください。ここで、ベクトル積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}$$

を利用してください。

# 固有方程式を解く [1]

- いずれの手続きでも式(3.20)が導かれました。

$$(E \cdot K)K - |K|^2 E + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} E = 0 \quad (3.20)$$

それでは(3.20)を解いて $K$ の固有値と対応する電界ベクトル $E$ の固有関数を求めましょう。

- ここで複素屈折率、すなわち、 $\hat{N} = n + i\kappa$

を導入します。ここに $n$ は屈折率、 $\kappa$ は消光係数です。

- 媒質中において波数 $K$ は  実数部は空間的な波の波長を与えます

[注]  $K = \omega \hat{N} / c = \omega n / c + i \omega \kappa / c$   虚数部は波の減衰を与えます。

[注] 波数 $K$ は $2\pi/\lambda'$ となる。ここに $\lambda'$ は媒質中での波長で、媒質中での光速を $c'$ とすると $\omega/c'$ と表される。媒質中での光速 $c'$ は屈折率を $n$ とすると $c/n$ で与えられるから、 $K = \omega n / c$ である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率 $N$ 、すなわち $n + i\kappa$ を導入すると、上の式となる。

# 複素屈折率 $n+i\kappa$

- 電磁波の空間変化を  $\exp(iKz)$  で表します。
- $K=\omega N/c=\omega(n+i\kappa)/c$  とします。
- $\exp(iKz)=\exp(i\omega n z/c)\exp(-\omega\kappa z/c)$  と書けます。
- この波動は、振幅が距離  $z$  とともに振動しながら減衰する波を表します。
- 光の強度の減衰を表すときには  $|\exp(iKz)|^2$  を考えます。  
 $|\exp(iKz)|^2 = \exp(-2\omega\kappa z/c)$
- これを吸収係数  $\alpha$  を用いて  $\exp(-\alpha z)$  に等しいと置くと、  
 $\alpha = 2\omega\kappa/c = 4\pi\kappa/\lambda$  と表すことができます。

## 固有方程式を解く [2]

- 波数ベクトルの向きに平行で長さが  $\hat{N}$  であるような屈折率ベクトル  $\hat{N}$  を用いると、(3.19)の第1式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{N} \cdot \mathbf{r} / c)\} \quad (3.21)$$

となり、固有方程式(3.20)は

$$\hat{N}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \hat{N}) \hat{N} - \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.22)$$

によって記述できます。

- 以下では、第2回に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求めます。

# ファラデー配置の場合

- 磁化がz軸方向にあるとして、z軸に平行に進む波( $\mathbf{N} // z$ )に対して式(3.21)は

$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - \hat{N}z/c)\} \quad (3.23)$$

- と表されます。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

と書けます。この式は下に2式に分けられます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0, \quad (3.24') \quad -\varepsilon_{zz} E_z = 0 \quad (3.24'')$$

# 永年方程式

- 式(3.24')がEの如何によらず成立するには、

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$\Rightarrow (\hat{N}^2 - \varepsilon_{xx})^2 + \varepsilon_{xy}^2 = 0$

- これより、 $N^2$ の固有値として2個の値

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26)$$

$\Downarrow (\hat{N}^2 - \varepsilon_{xx})^2 = -\varepsilon_{xy}^2 = (i\varepsilon_{xy})^2$

- を得られます。これらの固有値に対応する固有関数は、

$$E_{\pm} = \frac{E_0}{2} (i \pm ij) \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_{\pm}}{c} z\right)\right\} \quad (3.27)$$

- $E_+$ 、 $E_-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応します。

# $E^+$ 、 $E^-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応

$$E_+ = \frac{E_0}{2} (i + i j) \exp(-i\omega t)$$

実数部のみを考えると

$$\text{Re}(E_+) = \frac{E_0}{2} \{ \cos \omega t i + \sin \omega t j \}$$

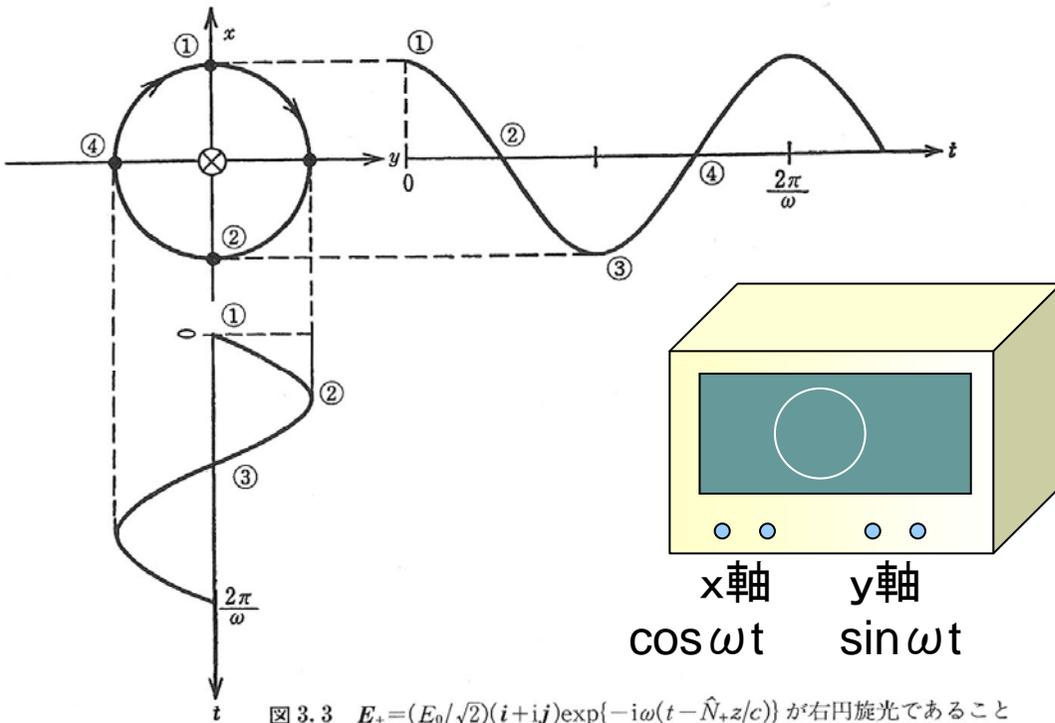


図 3.3  $E_+ = (E_0/\sqrt{2})(i + i j) \exp\{-i\omega(t - \hat{N}_+ z/c)\}$  が右円旋光であること

- 直交する2つの直線偏光の位相が90度異なっているときに合成したベクトルの軌跡は円になります。
- $x$ 軸に $\cos \omega t$ 、 $y$ 軸に $\sin \omega t$ を入力したときのオシロスコープのリサージュ波形を思い出してください。

# 提出課題

- Z軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、Eの如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26)$$

# ここまでのまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の複素屈折率は

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応する。

(ここに、 $\varepsilon_{xx}$ は誘電テンソルの対角成分、 $\varepsilon_{xy}$ は非対角成分である。)

- もし $\varepsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じない。

# ファラデー効果の現象論

- 前回に述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じます。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電テンソル  $\varepsilon$  の成分を使ってどのように書き表せるかを述べます。
- 結論から先に述べると、ファラデー回転角  $\phi_F$ 、ファラデー楕円率  $\eta_F$  は  $\varepsilon_{xy}$  の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれます。
  - まず、右円偏光および左円偏光に対する屈折率  $n_+$  と  $n_-$ 、消光係数  $\kappa_+$  と  $\kappa_-$  および  $\varepsilon_{xy}$  との関係からスタートします。

# 左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

- すでに述べたように、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26) \quad \text{と書けますが、複号を別々に書くと、}$$

$$\hat{N}_{+} = n_{+} + i\kappa_{+} \quad \hat{N}_{-} = n_{-} + i\kappa_{-} \quad \text{となります。}$$

ここで、

$$\Delta n = n_{+} - n_{-}; \Delta \kappa = \kappa_{+} - \kappa_{-}; n = \frac{n_{+} + n_{-}}{2}; \kappa = \frac{\kappa_{+} + \kappa_{-}}{2}$$

という置き換えをすると、

$$\begin{aligned} n_{+} &= n + \Delta n / 2; & n_{-} &= n - \Delta n / 2 \\ \kappa_{+} &= \kappa + \Delta \kappa / 2; & \kappa_{-} &= \kappa - \Delta \kappa / 2 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \hat{N}_{+} &= n_{+} + i\kappa_{+} = (n + \Delta n / 2) + i(\kappa + \Delta \kappa / 2) \\ &= (n + i\kappa) + (\Delta n + i\Delta \kappa) / 2 \end{aligned}$$

# 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係 (1)

$$\hat{N}_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i \left( \kappa \pm \frac{\Delta \kappa}{2} \right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2} (\Delta n + i\Delta \kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2} \Delta N \quad (3.37)$$

ここに  $\Delta N = N_+ - N_- = \Delta n + i\Delta \kappa$  (3.38)

- この  $N_{\pm}$  を(3.26)に代入して

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \left( \hat{N} \pm \Delta \hat{N} / 2 \right)^2 \approx \hat{N}^2 \pm \hat{N} \Delta \hat{N} = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26')$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= n^2 - \kappa^2; \quad \varepsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \varepsilon'_{xy} &= n\Delta \kappa + \kappa\Delta n \quad \varepsilon''_{xy} = \kappa\Delta \kappa - n\Delta n \end{aligned} \quad (3.39)$$

# 自習課題(3) [提出の必要はありません]

- 式(3.39)の関係式を導いてみよう。

ヒント 式(3.26)の第1式  $N_+^2 = \varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}$  に

$N_+ = n_+ + i\kappa_+$ ,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy}$  を代入すると  
 $(n_+ + i\kappa_+)^2 = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} + i(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})$  が得られる。

これに、 $n_+ = n + \Delta n/2$ ,  $\kappa_+ = \kappa + \Delta\kappa/2$  を代入し、  
 $\Delta n$  および  $\Delta\kappa$  について 1 次の項のみを考えると、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} - \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{xy})$$

同様に  $N_-^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$  について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} - \varepsilon'_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式(3.39)が得られる。

# 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係 (1)

- $\Delta n$  と  $\Delta \kappa$  を  $\varepsilon_{xy}$  を使って表すと次式になります。

$$\Delta n = \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2}; \quad \Delta \kappa = \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \quad (3.40)$$

- $\Delta N$  に書き直すと

$$\Delta \hat{N} = \Delta n + i \Delta \kappa = \frac{i(n - i\kappa)(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})}{n^2 + \kappa^2} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.41)$$

こんな導き方もできます。

$$\Delta \hat{N} = \hat{N}_+ - \hat{N}_- = \sqrt{\varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}} \approx i \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(1)

- 図3.4に示すようにxz面を振動面とする直線偏光 $E_{in}$ が物質に入射したとします。ここに光の進行方向はz軸の向きである。x軸の単位ベクトルを $i$ , y軸の単位ベクトルを $j$ とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられます。

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) i \quad (3.42)$$

- ここで、右円偏光単位ベクトル $r$ と、左円偏光単位ベクトル $l$ を次式のように定義します。

$$r = (i + ij)/2^{1/2}, \quad l = (i - ij)/2^{1/2} \quad (3.43)$$

- 式(3.42)を $r$ と $l$ を使って表すと、

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) (r + l) \quad (3.44)$$

- のように表されます。

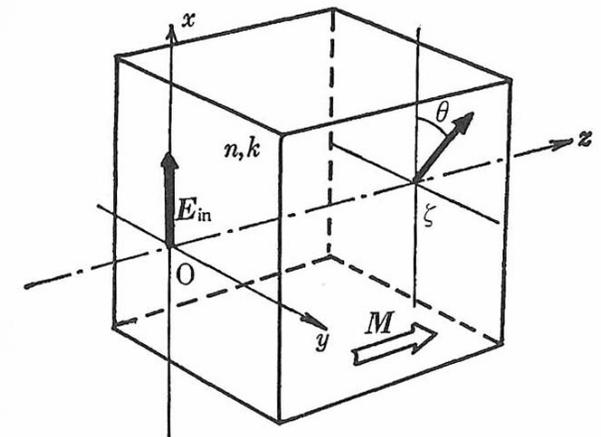


図3.4 座標系のとり方  
光の進行方向(=磁化の方向)をz軸正の向きに、入射直線偏光の電界の振動方向をx軸にとる。回転角は図の方向を正とする。

## ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(2)

- 物質中の複素屈折率は右円偏光に対しては $N_+$ 、左円偏光に対しては $N_-$ である。表面を $z=0$ として物質中の $z=\zeta$ の位置では、位相がそれぞれ $i\omega N_+ \zeta / c$  および  $i\omega N_- \zeta / c$  だけ進むので、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(i\omega \hat{N}_+ \zeta / c) \mathbf{r} + \exp(i\omega \hat{N}_- \zeta / c) \mathbf{l} \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}}{c} \zeta\right)\right\} \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta \hat{N}}{2c} \zeta\right) \mathbf{r} + \exp\left(-i\omega \frac{\Delta \hat{N}}{2c} \zeta\right) \mathbf{l} \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表されます。第2式では

$$N_+ = N + \Delta N / 2, \quad N_- = N - \Delta N / 2 \quad \text{と置き換えました。}$$

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta \kappa$ で表す(3)

- ここで、ふたたび、もとの $xy$ 座標系に戻すと

$$E_{out} = \frac{E_0}{2} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times$$
$$\left[ \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) + \exp\left(-i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{i} + i \left\{ \exp\left(i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) - \exp\left(-i\omega \frac{\Delta N}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right]$$

(3.45')

さらに式(3.38)を使って書き直すと

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \times$$
$$\left[ \left\{ \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) - i \frac{\omega\Delta \kappa}{2c}\zeta \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{i} - \left\{ \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) + i \frac{\omega\Delta \kappa}{2c}\zeta \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c}\zeta\right) \right\} \mathbf{j} \right]$$

(3.46)

# ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta k$ で表す(4)

- 図3.5に示すように、座標系を $z$ 軸の回りに $\theta = -(\omega \Delta n \zeta / 2c)$ だけ回転した座標系を $x'y'z'$ で表しその単位ベクトルを $i', j', k'$ とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

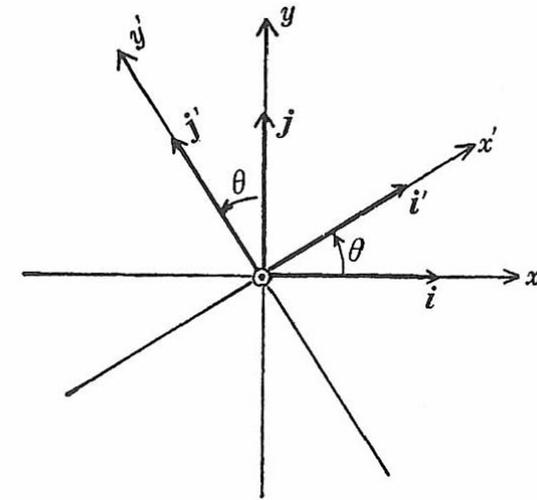


図3.5  $z$ 軸のまわりに $\theta$ だけ回転した座標系  
 $z$ 軸は紙面に垂直上向きにとる。

で表せる。これを使って $E_{out}$ は次のように書き直せます。

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{N}{c}\zeta\right)\right\} \left( i' - i\left(\frac{\omega\Delta k}{2c}\zeta\right)j' \right) \quad (3.48)$$

## ファラデー効果を $\Delta n$ , $\Delta \kappa$ で表す(5)

- もし、磁気円二色性がないとすると $\Delta \kappa = 0$ であるから、 $E_{\text{out}}$ は $i'$ 成分のみとなり、 $x'$ 軸方向の直線偏光であることがわかります。入射直線偏光は $x$ 軸から $x'$ 軸へと $\theta$ だけ回転したのである。これがファラデー回転角 $\theta_F$ である。すなわち、ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega \Delta n}{2c} \zeta \quad (3.49)$$

$\Delta \kappa \neq 0$ のときは、式(3.48)は $x$ 軸を長軸、 $y$ 軸を短軸とする楕円偏光になります。この楕円偏光の楕円率 $\eta_F$ は短軸と長軸の振幅の比で与えられ

$$\eta_F = -\frac{\omega \Delta \kappa}{2c} \zeta \quad (3.51) \quad \text{と表されます。}$$

# ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す (1)

- いま、複素ファラデー回転角  $\Phi_F$  を  $\theta_F$  と  $\eta_F$  によって定義すると

$$\Phi_F = \theta_F + i\eta_F \quad (3.52)$$

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}(\Delta n + i\Delta\kappa)\zeta = -\frac{\omega\Delta\hat{N}}{2c}\zeta \quad (3.53)$$

と書けます。この式に式(3.41)  $\Delta\hat{N} = \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$  を代入すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}\zeta \quad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分  $\varepsilon_{xy}$  に比例し、対角成分  $\varepsilon_{xx}$  の平方根に反比例することがわかります。

## ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す(2)

- 式(3.54)を実数部と虚数部に分けて記述すると

$$\theta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa \varepsilon'_{xy} - n \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta \quad (3.55)$$

$$\eta_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n \varepsilon'_{xy} + \kappa \varepsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \zeta$$

このように、ファラデー回転角と楕円率は誘電テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。

# ファラデー効果を $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{xy}$ で表す(3)

- 通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので、式(3.55)において $\kappa=0$ と置くと、

$$\theta_F = \frac{\omega \varepsilon''_{xy}}{2cn} \zeta \quad (3.57)$$

$$\eta_F = -\frac{\omega \varepsilon'_{xy}}{2cn} \zeta$$

となって、回転角が $\varepsilon_{xy}$ の虚数部に、楕円率が $\varepsilon_{xy}$ の実数部に対応することがわかりました。

磁化 $M$ による展開式を代入すると

$$\Phi_F \approx -\frac{i\pi\ell}{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon_{xy}^{(1)} M}{\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{xx}^{(2)} M^2}}$$

となり、磁気光学効果は $M$ の小さいときほぼ $M$ に比例します。

# フォークト配置の磁気光学

- 磁化  $M$  に垂直な  $x$  軸に平行に進む波 ( $N//x$ ) に対しては、波動関数は、

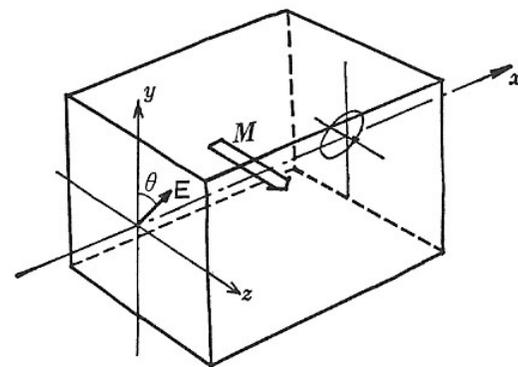
$$E = E_0 \exp\{-i\omega(t - Nx/c)\} \quad (3.29)$$

- と表されます。固有方程式は

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

- となるので、永年方程式は次の式で表されます。

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & N^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.31)$$



# フォークト配置の場合の固有値

- $N^2$ の固有値として

$$\hat{N}_1^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \quad \text{および} \quad \hat{N}_2^2 = \varepsilon_{zz}$$

という2つの解を得ます。対応する固有関数は

$$E_1 = A \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_1}{c}x\right)\right\}(\varepsilon_{xy}\mathbf{i} - \varepsilon_{xx}\mathbf{j}) \quad (3.33)$$

$$E_2 = B \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_2}{c}x\right)\right\}\mathbf{k}$$

となり、磁気複屈折を生じます。

# コットンムートン効果

- コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合（フォークト配置）の磁気光学効果です。
- この効果は磁化 $M$ の偶数次の効果であって磁界の向きに依存しません。
- いま、磁化 $M$ が存在すると $M$ の方向に一軸異方性が誘起され、 $M$ 方向に振動する直線偏光（常光線）と $M$ に垂直の方向に振動する光（異常光線）とに対して屈折率の差が生じて、複屈折を起こす現象です。
- 磁化のある場合の誘電テンソルの対角成分  $\varepsilon_{xx}(M)$  と  $\varepsilon_{zz}(M)$  が一般的には等しくないことから生じます。  $\varepsilon$  テンソルの対角成分はその対称性から $M$ について偶数次でなければならないので、複屈折によって生じる光学的遅延も $M$ の偶数次となります。
- コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて、モード変換部として用いられます。

# 今回学んだこと

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の屈折率 $N$ は $N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}$ で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します。(ここに、 $\epsilon_{xx}$ は誘電率テンソルの対角成分、 $\epsilon_{xy}$ は非対角成分です。)もし、 $\epsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じません。
- 長さ $z$ の磁性体におけるファラデー回転角 $\theta_F$ およびファラデー楕円率 $\eta_F$ は、左右円偏光に対する屈折率の差 $\Delta n$ および消光係数の差 $\Delta \kappa$ を用いて表すことができます。
- さらに、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。
- また、磁化が光の進行方向に対して垂直なフォークト配置ではコットンムートン効果という磁気複屈折現象が生じることを学びました。

# 課題

- Z軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、Eの如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy} \quad (3.26)$$