

3.5 反射と光学定数

3.5.1 波数ベクトルの境界条件

次の3.6節では、反射の磁気光学効果における旋光角（カー回転角 K ） 楕円率 K と誘電テンソルの非対角成分 xy' , xy'' との関係を導くが、この節ではその準備として反射の際に光の振幅と位相が受ける変化について述べる。⁴⁾

図3.7のように媒質1から媒質2に向かって、平面波の光が入射するときの反射と屈折を考える。両媒質は均質であり、媒質1の屈折率は n_0 で、消光係数は0、媒質2の屈折率は n で、消光係数は k であるとする。また、それぞれの媒質の誘電率を ϵ_1 , ϵ_2 とする。従って、媒質1において $\epsilon_1 = n_0^2$ が、媒質2においては

$$\epsilon_2 = (n + ik)^2 \text{ が成立する。}$$

境界面から媒質2の中に向かう法線方向を z 軸にとる。光の入射面は xz 面内にあるとする。入射光と法線のなす角（入射角）を ψ_0 、反射光の法線となす角を ψ_1 、媒質2へと屈折する光の法線となす角を ψ_2 とする。

入射光、反射光、屈折光の波数ベクトルをそれぞれ K_0 , K_1 , K_2 とすると、各媒質におけるマクスウェルの方程式を解いて、波数ベクトルの絶対値に成り立つ次の関係式を得る。（問題3.7参照）

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \\ K_1 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \\ K_2 &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

境界面内での波数ベクトルの各成分の連続性から、 x 成分については

$$K_{0x} = K_{1x} = K_{2x} \quad (3.60)$$

が成り立つ。

$$K_0 \sin \psi_0 = K_1 \sin \psi_1 = K_2 \sin \psi_2$$

これより

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi_1 \\ \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_0} &= \frac{K_0}{K_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{N_1}{N_2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

この第2式はいわゆるスネルの法則であるが、複素数に拡張されている。一方、 z 成分については

$$\begin{aligned} K_{1z} &= -K_{0z} = -K_0 \cos \psi_0 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \psi_0 \\ K_{2z} &= \sqrt{K_2^2 - K_{2x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} = \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \psi_0} \end{aligned} \quad (3.62)$$

が成り立つ。（問題3.7参照）

3.5.2 斜め入射の反射の公式

図3.8において、入射面（入射光と法線を含む面）を xz としたとき、この面に垂直な電界ベクトルの成分（ y 成分）を E^S と垂直を意味するドイツ語 senkrecht の頭文字の S をつけて表し、入射面内の成分を E^P と P (parallel) をつけて表す。入射側には下付の添え字0をつけ、反射光には1、屈折光には2をつける。 x 成分、 y 成分を P 成分、 S 成分を使って表すと

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_0^P \cos \psi_0, E_{0y} = E_0^S \\ E_{1x} &= -E_1^P \cos \psi_0, E_{1y} = E_1^S \\ E_{2x} &= E_2^P \cos \psi_2, E_{2y} = E_2^S \end{aligned}$$

電界の x 成分、 y 成分の連続性より

$$\begin{aligned} (E_0^P - E_1^P) \cos \psi_0 &= E_2^P \cos \psi_2 \\ E_0^S + E_1^S &= E_2^S \end{aligned}$$

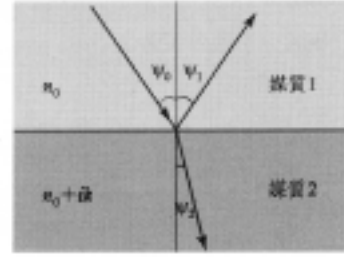


図3.7 媒質1から媒質2へ平面波が入射するときの反射と屈折

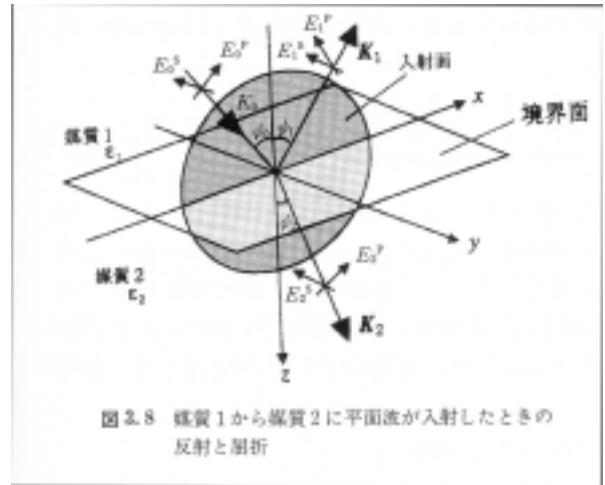


図3.8 媒質1から媒質2に平面波が入射したときの反射と屈折

$$(3.64)$$

一方、磁界の x 成分、 y 成分についての連続の式は次式で表される。

$$\begin{aligned} (H_0^P - H_1^P) \cos \psi_0 &= H_2^P \cos \psi_2 \\ H_0^S + H_1^S &= H_2^S \end{aligned} \quad (3.65)$$

をマクスウェル方程式

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

から導かれる $H^S = (K/\omega\mu_0) E^P$ 、 $H^P = -(K/\omega\mu_0) E^S$ によって電界についての式に書き直すと、

$$\begin{aligned} K_0 (E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 &= K_1 E_2^S \cos \psi_2 \\ K_0 (E_0^P + E_1^P) &= K_2 E_2^P \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

が得られる。式(3.64)、式(3.66)の4式を解いてP偏光、S偏光に対する複素振幅反射率(フレネル係数) r_p 、 r_s を求めると、

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{E_1^P}{E_0^P} = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} \\ &= \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \\ r_s &= \frac{E_1^S}{E_0^S} = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} \\ &= \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

となる。ここに、 $r_p = |r_p| e^{i\delta_p}$ 、 $r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$ である。上の各式を導くに当たり、式(3.61)、式(3.62)を用いた。(問題 3.8 参照)

式(3.67)を用い、係数 r_s 、 r_p との比をとり、

$$\frac{r_s}{r_p} = -\frac{\cos(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 + \psi_2)} = \left| \frac{r_s}{r_p} \right| \exp(i\delta) \equiv \tan \rho \exp(i\delta) \quad (3.68)$$

とおくと、反射は方位角 ρ と位相差 $\delta = \delta_p - \delta_s$ によって記述できる。いま、真空中から、入射面から 45° 傾いた直線偏光 ($E_s = E_p$) を、誘電率 ϵ_r (複素屈折率 $N = n + i\kappa$) の媒体に入射する場合を考える。反射光は一般には楕円偏光になっているが、その p 成分と s 成分の逆正接角 ρ と位相差 δ を測定すれば、 ϵ_r が求められる。(測定には $1/4$ 波長板と回転検光子を用いる。) この方法を偏光解析またはエリプソメトリという。

光強度についての反射率 R は $|r|^2$ で与えられ、

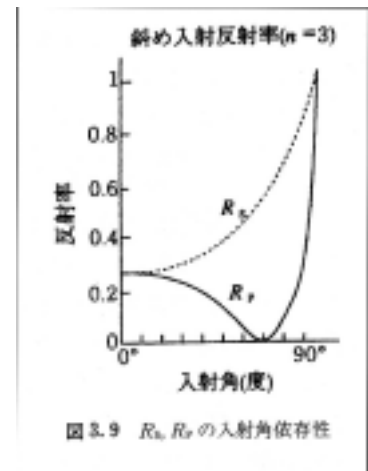
$$\begin{aligned} R_p &= \left| \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2 \\ R_s &= \left| \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

となる。上式において、もし、 $0 + 2 = \pi/2$ であれば、 \tan が発散するため、 $|r_p|$ は 0 となる。このとき、反射光は S 偏光のみとなる。このような条件を満たす入射角をブリュースター角という。

第1の媒体が真空、第2の媒体の複素屈折率が N の場合

$$\begin{aligned} R_p &= \left| \frac{N^2 \cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}}{N^2 \cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2 \\ R_s &= \left| \frac{\cos \psi_0 - \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}}{\cos \psi_0 + \sqrt{N^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

この式にもとづいて $N = 3 + i0$ の場合について、 R_p 、 R_s をプロットすると図 3.9 のようになる。 R_p は入射角 70° 付近で 0 となっていることがわかる。この入射角をブリ



ユースター角と呼ぶ。

3.5.3 垂直入射の反射の公式

垂直入射の場合、 $\psi_0 = 0$ 、従って $\psi_1 = 0$ 。このとき電界に対する複素振幅反射率 r として、

$$r = r_p = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0}$$

を得る。垂直入射の場合、入射光の p 成分 E_0^p の向きと反射光の p 成分 E_1^p の向きとは逆になっていることに注意。この式に式 (3.59) を代入すると次式に示すようになる。

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \quad (3.71)$$

媒質 1 は透明 (屈折率 n_0)、媒質 2 は吸収性 (屈折率 n , 消光係数 κ) とすると、

$$\sqrt{\varepsilon_1} = n_0, \quad \sqrt{\varepsilon_2} = n + i\kappa$$

となるので、式 (3.70) は

$$r = \frac{N - n_0}{N + n_0} = \frac{n + i\kappa - n_0}{n + i\kappa + n_0} \equiv \sqrt{R} \exp(i\theta) \quad (3.72)$$

と書ける。ここに $R = r^*r = |r|^2$ は光強度の反射率、 θ は反射の際の位相のずれであって、次の 2 式のように表すことができる。

$$R = \frac{(n_0 - n)^2 + \kappa^2}{(n_0 + n)^2 + \kappa^2} \quad (3.73)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2n_0\kappa}{n^2 + \kappa^2 - n_0^2}$$

以上述べたことから、光が界面に垂直に入射したとき、反射光の強度は入射光の R 倍となり、反射光の位相は入射光の位相から θ だけ遅れることが導かれた。逆に、 R と θ がわかれば、次式で n 、 κ を求めることができる。

$$n = n_0 \frac{1 - R}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta} \quad (3.74)$$

$$\kappa = 2n_0 \frac{\sqrt{R} \sin \theta}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$

次節で述べるように位相は反射率のスペクトルからクラマース・クローニヒの関係式を使って計算で求めることができる。

3.5.4 クラマース・クローニヒの関係式⁵⁾

誘電率の実数部 ε'_{ij} と虚数部 ε''_{ij} は決して独立ではなく、両者の間にはクラマース・クローニヒの関係式と呼ばれる分散関係が成り立つ。

$$\varepsilon'_{ij}(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{x \varepsilon''_{ij}(x)}{\omega^2 - x^2} dx \quad (3.75)$$

$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\varepsilon'_{ij}(x)}{\omega^2 - x^2} dx$$

ここに、 P は主値をとること、すなわち

$$P \int_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\omega-\rho} \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\omega+\rho}^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2} dx$$

である。発散する位置を避けて積分することを意味する。

式(3.75)の関係は、誘電率ばかりでなく、磁化率、伝導率など外場に対する物質のレスポンスを表す量において成立する関係であり、外場が加えられる前には応答はないという至極当り前のこと(これを因果律という)から導くことができる。(問題 3.10 参照)ここでは誘電率の実数部と虚数部の間に成り立つ定性的な関係について述べておく。

式(3.75)の第 2 式を部分積分すると、

$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \varepsilon'_{ij}(\omega') \Big|_0^\infty + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \frac{d\varepsilon'_{ij}(\omega')}{dx} dx \quad (3.76)$$

上式右辺の第 1 項は 0 であるから、結局第 2 項のみとなる。 $\ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right|$ は $x \sim \omega$ 付近で大きい値をとるので、 ε'' は ε' の微分形に近いスペクトル形状を示すことになる。すなわち、 ε' がピークを持つ ω では ε'' は急激に変化し、 ε' が急激に変化する ω 付近で ε'' は極大(または極小)を示す。

式(3.75)と同様の関係は

$$\ln r = \frac{1}{2} \ln R + i\theta$$

における $(1/2)\ln R$ と θ との間にも成り立つことが Toll によって導かれている⁶⁾。すなわち

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (3.77)$$

この式が反射スペクトルにおけるクラマース・クローニヒの関係式で、 $R(x)$ のデータが $(0, \infty)$ の範囲に対して知られているならば任意の ω に対する移相量 $\theta(\omega)$ を計算することができる。こうして $\theta(\omega)$ が求めれば式(3.74)によって、光学定数 n と κ を計算できる。 n と κ が得られれば、さらに、式(3.39)により誘電率の実数部 ϵ'_{ij} および虚数部 ϵ''_{ij} が計算されるということが理解されよう。

クラマース・クローニヒの式はたいそう便利な関係式であるが、次の点に注意して使わなければならない。

(1)測定できる反射率のスペクトル $R(\omega)$ は、 ω の有限の範囲に限られるので、その範囲外について適当な外挿を行うか、適当な近似を用いて計算することになる。

(2)数値計算により式(3.77)の主値を求める場合に、被積分関数 $\ln R(\omega')/(\omega'^2 - \omega^2)$ は $\omega' \rightarrow \omega - 0$ および $\omega' \rightarrow \omega + 0$ に対してそれぞれ $-\infty$ および $+\infty$ に発散するので主値は大きな正の量と負の量との差し引きを求めることになり、コンピュータの精度が問題になってくる。このため収束をよくするためのアルゴリズムの工夫が行われている。

3.5 節のまとめ

垂直入射の場合の複素振幅反射率(フレネル係数) r は次式で与えられる。

$$r = \frac{n + i\kappa - n_0}{n + i\kappa + n_0}$$

反射率 R および移相量 θ は

$$R = \frac{(n_0 - n)^2 + \kappa^2}{(n_0 + n)^2 + \kappa^2} \quad \cdot \text{で与えられる.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2n_0\kappa}{n^2 + \kappa^2 - n_0^2}$$

また、 R と θ の間にはクラマース・クローニヒの関係が成り立つ。

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

・反射スペクトル R から移相量 θ が計算でき、これらから n と κ が求められる。

$$n = n_0 \frac{1 - R}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$

$$\kappa = 2n_0 \frac{\sqrt{R} \sin \theta}{1 + R - 2\sqrt{R} \cos \theta}$$

3.6 磁気カー効果の現象論

ファラデー効果の場合と同様にカー効果も誘電率または伝導率テンソルを用いて表すことができる。なぜ誘電率を用いて表すのかというと、ファラデー効果のときと同様に誘電率はミクロな量との対応が付けやすく、物質本来の性質を表していると考えられるからである。カー効果の場合も、誘電率テンソルの非対角成分 ϵ_{xy} は θ_K と η_K の一次結合で表されるが、その係数はファラデー効果の場合に比べて複雑な n と κ の関数となっている。これは反射率や移相が屈折率 n や消光係数 κ の非線形関数となっていること(前節参照)に由来している。

カー効果における符号のとり方にも2通りのやり方がある。即ち、入射光側からみて時計方向に回るのを+にとる場合と、半時計方向に回るのを+にとる場合の2種類がある。ここでは、ファラデー効果と同じように入射側からみて時計回りを正にとっておく。

3.6.1 垂直入射極カー効果

いま、我々は問題を複雑にしないために、極カー効果(2.5節参照)の場合を扱い、しかも入射光は界面に垂直に入射するものとする。2.5節に述べたように極カー効果は直線偏光が入射したとき、反射光が楕円偏光となり、その楕円の長軸の向きが入射光の偏光方向に対して回転する現象である。この回転をカー回転角 θ_K で表し、楕円の長軸と短軸の比を楕円率 η_K で表す。カー回転角は右円偏光と左円偏光に対する移相量の差に対応し、楕円率は左右円偏光に対する反射率の違いから生じることを示すことができる。

右回り円偏光および左回り円偏光に対する振幅反射率は

$$\hat{r}_{\pm} = \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} \quad (3.78)$$

によって表すことができる。

問題 3.9 で導かれるように、右円偏光に対する複素振幅反射率（フレネル係数）を $r_+ \exp(i\theta_+)$ 、左円偏光に対するそれを $r_- \exp(i\theta_-)$ とすると、カー回転角 θ_K は

$$\theta_K = -\frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \equiv -\frac{\Delta\theta}{2} \quad (3.79)$$

で与えられる。式 (3.79) では反射光について左回りの回転を正にとっている。これに対して、反射光の進行方向に右ネジをすすめるような回転を正にとるときの回転角を κ とすると、 $\kappa = -\theta_K$ となる。

また、カー楕円率 η_K は

$$\eta_K = \frac{|r_+| - |r_-|}{|r_+| + |r_-|} \equiv \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad (3.80)$$

で表すことができる。

ここで、磁気カー回転角 φ_K と磁気カー楕円率 η_K をひとまとめにした複素カー回転 Φ_K は、

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = -\frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{\Delta\hat{r}}{2\hat{r}} \approx i\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.81)$$

である。ここに \hat{r} 、 Δr は、 $\hat{r} = (r_+ + r_-)/2$ 、 $\Delta r = r_+ - r_-$

で与えられる*。この式と式(3.78)とから、次式を得る。(問題 3.11 参照)

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.82)$$

この式から、カー効果が誘電率の非対角成分 ε_{xy} に依存するばかりでなく、分母に来る対角成分 ε_{xx} にも依存することがわかる。この式の対角成分 ε_{xx} を光学定数 n 、 κ によって表すと、

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = (n^2 - \kappa^2) + i2n\kappa$$

と書けるので、(3.82)に代入して整理することによって、

$$\begin{aligned} \theta_K &= n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\left\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2\kappa^2\right\}} \\ \eta_K &= n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\left\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2\kappa^2\right\}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

を得る。

3.6.2 極カー回転に対するクラマース・クローニヒの関係

前節に述べた式(3.76)と同様の関係がカー回転角 θ_K とカー楕円率 η_K との間にも成り立つ。即ち、

$$\begin{aligned} \theta_K(\omega) &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \eta_K(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \eta_K(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\theta_K(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (3.84)$$

ここに、楕円率 η_K と反射の磁気円二色性 $\Delta R/R$ との間には $\Delta R/R = 4\eta_K$ なる関係式が成り立つ。測定範囲は限られた周波数範囲 ($\omega < \alpha$) であるが、Smith によると、その周波数範囲より高い周波数の η_K からの寄与が単にバックグラウンドとしてしか効かないときには、 $\omega < \alpha$ に対して次の分散式がよい近似となる⁸⁾。

$$\theta_K = \frac{2\omega^2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\eta_K(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' \quad (3.85)$$

* $\hat{r} = r \exp(i\theta)$ を微分して $\Delta\hat{r} = \left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right) r \exp(i\theta) = \left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right) \hat{r}$

従って、 $\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta = \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}} \approx \ln\left(1 + \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}}\right) = \ln\frac{2\hat{r} + \Delta\hat{r}}{2\hat{r} - \Delta\hat{r}} = \ln\frac{\hat{r}_-}{r_-} = -\ln\frac{\hat{r}_+}{r_+}$

3.6.3 斜め入射の極力一効果

次に、斜め入射の場合を考える。いま、Eベクトルが入射面内にあるp偏光が入射角 φ_0 で入射したとき、界面を透過した光の屈折角 φ_2 とすると複素力一回転角 Φ_K は

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} \quad (3.86)$$

のように r_{sp}/r_{pp} によって表される。ここに、 r_{sp} は入射p偏光成分に対し、Eベクトルが入射面に垂直なs偏光成分が反射光として現れる比率を表す。 r_{pp} は、入射p偏光に対しp偏光が反射される比率を表す。このときの r_{sp} 、 r_{pp} を誘電率を使って表すと

$$r_{sp} = r_{ps} = -\frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(\cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left(\cos \varphi_2 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.87)$$

$$r_{pp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2} \quad (3.88)$$

複素力一回転角を Φ_K とすると、 Φ_K は次式で与えられる。

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(\cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left(\cos \varphi_2 - \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.89)$$

ここに、 φ_0 と φ_2 の間にはスネルの法則が成立する。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0} \quad (3.90)$$

である。 φ_0 は実数であるが、誘電率は複素数なので φ_2 は複素数である。式(3.88)で $\varphi_0=\varphi_2=0$ とおけば、垂直入射の場合の式(3.82)が得られる。

3.6.4 縦力一効果¹⁾

磁化の向きが反射面内にあつて、かつ光の入射面に平行な場合を縦力一効果と呼ぶ。電界が入射面に平行に偏光している光(p偏光)が、磁化された表面から斜めに反射されたとき反射光のp成分は、通常の金属による反射の場合とほとんど同様に振る舞うのであるが、磁化が存在することによってわずかにs成分(入射面に垂直に振動する成分)が生じる。一般にこの第2の電界成分は反射p成分と同位相ではなく、一定の位相差を有する。従つて、反射光は楕円の主軸がp面から少し回転しているような楕円偏光である。磁化の反転によって回転はp面について対称な方向に起きる。同様の効果は入射光がs偏光の場合にもいえる。この場合の力一回転楕円率はs方位について対称に起きる。この効果の大きさは、入射角に依存する。

前項に述べた斜め入射の場合の極力一効果と同様に、縦力一効果の複素力一回転角 Φ_K は

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}}$$

で与えられる。縦力一効果の場合の r_{sp} は、誘電テンソルを用いて、

$$r_{sp} = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\varepsilon_{xx} \cos \varphi_2 \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0 \right) \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 + \cos \varphi_2 \right)} \quad (3.91)$$

によって与えられることが導かれる。 r_{pp} については(3.88)式が成立するので、これらより $\tan \Phi_K$ を求めると、

$$\tan \Phi_K = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\varepsilon_{xx} \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2 \right) \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.92)$$

が得られる。 Φ_K の実数部が縦力一回転角、虚数部が縦力一楕円率を与える。 φ_0 と φ_2 の間には極力一効果の時と同様、スネルの法則が成立する。

3.6.5 横力一効果

磁化の方向が入射面に垂直な場合、入射s偏光に対しては何らの効果も及ぼさない。p偏光を入射した場合にのみ、その反射強度が磁化に依存して変化する効果として現れる。 r_{sp} の成分は生じないので偏光の回転は起きない。 r_{pp} を誘電テンソルの成分を使って表すと、

$$r_{pp} = \frac{\varepsilon_{xx} \cos \varphi_0 - \left(\cos \varphi_2 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \sin \varphi_2 \right)}{\varepsilon_{xx} \cos \varphi_0 + \left(\cos \varphi_2 + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \sin \varphi_2 \right)} \quad (3.93)$$

となる．反射光の強度は $|r_{pp}|^2$ に比例する．磁化の効果は ε_{xy} を通じて現れる．

3.6 のまとめ

垂直入射の極力一効果において、複素力一回転 $\Phi_K = \theta_K + i\eta_K$ は

$$\Phi_K = \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

で表され、非対角成分だけでなく対角成分にも依存することがわかった．縦力一効果の複素力一回転は

$$\tan \Phi_K = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\varepsilon_{xx} \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2 \right) \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0 \right)}$$

で与えられる．

3.7 コットンムートン効果

ファラデー効果は光の進行方向と磁界とが平行な場合の磁気光学効果であったが、コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合（フォークト配置）の磁気光学効果である．この効果は磁化 M の偶数次の効果であって磁界の向きに依存しない．この効果はフォークト効果あるいは磁気複屈折効果とも呼ばれる．いま、磁化のないとき等方性の物質を考えると複屈折は生じないが、磁化 M が存在すると M の方向に一軸異方性が誘起され、 M 方向に振動する直線偏光（常光線）と M に垂直の方向に振動する光（異常光線）とに対して屈折率の差が生じて、複屈折を起こす現象である．これは3.2節に述べた磁化のある場合の誘電テンソルの対角成分 $\varepsilon_{xx}(M)$ と $\varepsilon_{zz}(M)$ が一般的には等しくないことから生じる． ε テンソルの対角成分はその対称性から M について偶数次でなければならないので、複屈折によって生じる光学的遅延も M の偶数次となる．コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて、モード変換部として用いることができる．以下に、この効果について式を使って説明しよう．

3.3.3 に述べたように、フォークト配置における複素屈折率の固有値 N は式(3.32)に示されるように2つの値をとる．すなわち、座標系を図3.10のようにとると、

$$N_1^2 = \varepsilon_{xx} + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}$$

$$N_2^2 = \varepsilon_{zz}$$

ここで N_1^2 を式(3.31)に代入すると、 E_x と E_y の関係は次のようになる．

$$E_y = -(\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx})E_x$$

従って、固有関数は

$$E_1 = A \exp \left\{ -i\omega \left(t - \frac{N_1}{c} x \right) \right\} (\varepsilon_{xy} \mathbf{i} - \varepsilon_{xx} \mathbf{j}) \quad (3.94)$$

となる．一方、式(3.31)に N_2^2 を代入すると、次式が得られる．

$$E_2 = B \exp \left\{ -i\omega \left(t - \frac{N_2}{c} x \right) \right\} \varepsilon_{zz} \mathbf{k} \quad (3.95)$$

ε_{xy} が0であれば E_1 は y 方向に振動する直線偏光であるが、 $\varepsilon_{xy} \neq 0$ のとき E_1 は xy 面内に振動面を持つことになる．この結果、この波の波面の伝搬方向は x 軸方向であるが、エネルギーの伝搬方向は x 軸から $\tan^{-1}(\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{xx})$ だけ傾いたものとなる（問題3.15参照）．このような光線を異常光線と呼んでいる．一方 E_2 は x 方向に伝わる z 方向に振動する普通の光であって正常光線と呼んでいる．

いま、簡単のため $\varepsilon_{xy} = 0$ として光学遅延量（リターデーション） δ を計算すると

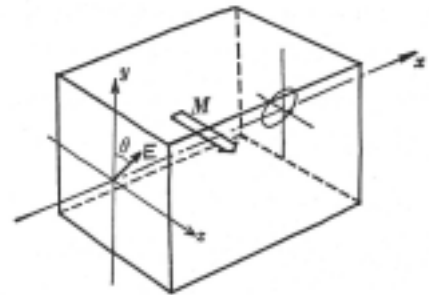


図3.10 コットンムートン効果における座標軸のとり方

$$\begin{aligned} \delta &= \omega(N_1 - N_2)\zeta / c = \omega(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{zz}})\zeta / c \\ &\approx \frac{\omega\zeta}{c} \cdot \frac{\varepsilon_{xx}^{(2)}(M) - \varepsilon_{zz}^{(2)}(M)}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}^{(0)}}} \end{aligned} \quad (3.96)$$

となる。ここに、 $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ 、 $\varepsilon_{zz}^{(n)}$ は M で展開したときの n 次の係数である。第2式を導くに当たっては、 $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ 、 $\varepsilon_{zz}^{(n)}$ が十分小さいとした。このように、 δ は M の偶数次の係数のみで表すことができた。また、 δ は正の実数であるとする、 ζ も実数である。

もし、入射光が z 軸から θ 傾いた振動面を持つ直線偏光であれば

$$E_{in} = E_0 \mathbf{j}' = E_0 (\cos \theta \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k}) \quad (3.97)$$

となる。 y 方向と z 方向の間に δ の光学的遅延があるとき、 $N=(N_1+N_2)/2$ として2つの波の成分を合成すると次式を得る。

$$E_{out} = E_0 \exp(i\omega N\zeta / c) \{ \exp(-i\delta/2) \cos \theta \mathbf{j} + \exp(i\delta/2) \sin \theta \mathbf{k} \} \quad (3.98)$$

ここで、 j, k 座標系から θ だけ傾いた j', k' 座標系に変換する。

$$\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{j}' + \sin \theta \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = -\sin \theta \mathbf{j}' + \cos \theta \mathbf{k}'$$

または、これの逆変換として

$$\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{j}' - \sin \theta \mathbf{k}'$$

$$\mathbf{k} = \sin \theta \mathbf{j}' + \cos \theta \mathbf{k}'$$

を得る。これを式(3.97)に代入すると、

$$E_{out} = E_0 \exp(i\omega \frac{N}{c} \zeta) \left[\left\{ \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \right\} \mathbf{j}' - i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \mathbf{k}' \right] \quad (3.99)$$

となる。ここで $\theta = \pi/4$ とすると次式が得られる。

$$E_{out} = E_0 \exp\left(i\omega \frac{N}{c} \zeta\right) \left(\cos \frac{\delta}{2} \mathbf{j}' - \sin \frac{\delta}{2} \mathbf{k}' \right) \quad (3.100)$$

出射光は y 軸と z 軸とからともに $\pi/4$ 傾いた j' 、 k' 軸を主軸に持つ楕円偏光になっている。その楕円率は $\eta = \tan(\delta/2)$ で与えられる。検光子を用いて入射光の偏光方向に垂直な偏光成分をとりだすと、その強度は

$$I = \frac{E_0^2}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{E_0^2(1 - \cos \delta)}{4} \approx \frac{E_0^2 \delta^2}{8}$$

で与えられる。従って、クロスニコル条件のもとで光強度を測定すると、光学的遅延の二乗に比例する信号を得る。このようにしてコットンムートン効果が測定できる。

一方、式(3.98)において $\delta = \pi$ となるように [これは式(3.96)で試料の長さ ζ を適当に選ぶことにより実現できる] した場合

$$E_{out} = -iE_0 \exp\left(i\omega \frac{N}{c} \zeta\right) (\cos 2\theta \mathbf{j}' - \sin 2\theta \mathbf{k}') \quad (3.101)$$

従って、出力光は入射光の振動方向である j' 軸から -2θ 傾いた直線偏光になっていることがわかる。導波路型光アイソレータではコットンムートン効果を相反旋光性素子として用い、非相反素子によって 45° 傾いた入射偏光をこの素子でさら

に 45° 旋光させている(7.2.3 参照)。入射光と 45° 傾いた成分の強度は $(1/2) |E_{j'} + E_k|^2$ で与えられ、これは

$$\frac{|E_{j'} + E_k|^2}{2} = \frac{E_0^2}{2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta)^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin 4\theta) \quad (3.102)$$

となつて、 $4\theta = \pi/2$ のとき最大になる。つまりこの効果を相反型旋光素子として用いるときに最大のモード変換効率を与えるのは磁化 M の方向 (つまり z 軸) が、入射偏光の偏光面 (光の磁界成分の向き) と 22.5° の傾きを持つ場合であることが導かれた。このとき E_{out} は入射光の振動面から 45° 傾いた直線偏光になっている。

・ 3.7 節のまとめ

- ・ コットンムートン効果：光の進行方向が磁化に垂直な場合の磁気光学効果
 - ・ 複屈折として観測される。
 - ・ 磁化の2次に比例 (偶数次のべき級数で展開できる。)
 - ・ クロスニコル条件で透過光強度を測れば測定できる。
 - ・ 光学的遅延量を 180° にしておくとも偏光面を回転できる。
 - ・ 導波路型アイソレータの相反旋光素子として用いる。

問題3.1 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導け。ただし、ベクトル積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} \text{ を利用せよ。}$$

(解) 式(3.18)の第1式の左辺に式(3.19)の第1式を代入すると

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iK_x & iK_y & iK_z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = i\mathbf{K} \times \mathbf{E}$$

となる。一方、式(3.18)の第1式の右辺に式(3.19)の第2式を代入すると

$$-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$$

したがって、 $\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega\mu_0 \mathbf{H}$ が成立する。同様にして、 $\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 \mathbf{E}$ が得られる。

これらの式から \mathbf{H} を消去すると、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \times \frac{1}{\omega\mu_0} (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

したがって、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega^2 \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}$$

ここで、 $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を使った。この式の左辺にベクトル積の公式

$\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{E} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K})\mathbf{E}$ を用いると、式(3.20)が得られる。

問題3.2 ファラデー配置の場合のマクスウェルの固有方程式(3.24)を導け。

(解) $N^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} = 0$ において $\mathbf{N} = N\mathbf{k}$ (\mathbf{k} は z 方向の単位ベクトル) を代入すると、

$$\begin{pmatrix} N^2 & & \\ & N^2 & \\ & & N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

となるので、整理すれば、式(3.24)となる。

問題3.3 式(3.39)の関係式を導け。

[ヒント] 式(3.26)の第1式 $N_+^2 = \varepsilon_{xx} + i\varepsilon_{xy}$ に $N_+ = n_+ + i\kappa_+$ 、 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx}$ 、 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy}$ を代入すると $(n_+ + i\kappa_+)^2 = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} + i(\varepsilon'_{xy} + i\varepsilon''_{xy})$ 。これに、 $n_+ = n + \Delta n/2$ 、 $\kappa_+ = \kappa + \Delta\kappa/2$ を代入し、 Δn および $\Delta\kappa$ について1次の項のみを考えると、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} - \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} + \varepsilon'_{xy})$$

同様に $N_-^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy}$ について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xy} + i(\varepsilon''_{xx} - \varepsilon'_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式(3.39)が得られる。

問題3.4 式(3.39)を伝導率テンソルの式に書換えよ。

[解答]

$$\sigma'_{xx} = 2\omega\varepsilon_0 n\kappa$$

$$\sigma''_{xx} = -\omega\varepsilon_0 (n^2 - \kappa^2 - 1)$$

$$\sigma'_{xy} = \omega\varepsilon_0 (\kappa\Delta\kappa - n\Delta n)$$

$$\sigma''_{xy} = -\omega\varepsilon_0 (n\Delta\kappa + \kappa\Delta n)$$

問題3.5 ファラデー効果を受けたとき出射光の式として式(3.46)が導かれることを確かめよ。

式(3.45')に $\Delta N = \Delta n + i\Delta\kappa$ を代入し、 $\exp(i\omega\Delta\kappa\zeta/c) \approx 1 + i\omega\Delta\kappa\zeta/c$ などの近似式を用いよ。

問題 3.6 座標系(xyz)をz軸の回りにだけ(x軸からy軸の方向に)回転して座標系(x'y'z')が得られたとすると、このときの座標変換の式が式(3.47)で与えられることを確かめよ。

問題 3.7 入射光, 反射光, 屈折光の波数ベクトルの絶対値が式(3.59)で与えられること、および、境界面でのz成分の連続の式(3.62)を導け。

[ヒント]

ここでは、3.3節と違って進行方向がz軸方向とは限らないので、電磁波は次のように書ける。

$$\text{入射光は } E_0 \exp(-i\omega t - i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad H_0 \exp(-i\omega t - i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})$$

$$\text{反射光は } E_1 \exp(i\omega t + i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}), \quad H_1 \exp(i\omega t + i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r})$$

$$\text{屈折光は } E_2 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r}), \quad H_2 \exp(-i\omega t + i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{r})$$

として、マクスウェルの方程式に代入する。

入射面をxz面にとったので

$$K_{0y} = K_{1y} = K_{2y} = 0$$

である。その結果

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 = \mathbf{K}_0 \times \mathbf{E}_0, \quad \omega\epsilon_1 \mathbf{E}_0 = -\mathbf{K}_0 \times \mathbf{H}_0$$

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_1 = -\mathbf{K}_1 \times \mathbf{E}_1, \quad \omega\epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{H}_1$$

$$\omega\mu_0 \mathbf{H}_2 = \mathbf{K}_2 \times \mathbf{E}_2, \quad \omega\epsilon_2 \mathbf{E}_2 = -\mathbf{K}_2 \times \mathbf{H}_2$$

各式から固有値として、

$$K_0^2 = K_1^2 = (\omega/c)^2 \epsilon_1, \quad K_2^2 = (\omega/c)^2 \epsilon_2$$

を得る。従って、

$$K_0 = K_1 = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_1}, \quad K_2 = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_2}$$

となり式(3.59)が得られた。

次に、境界面(xy面)内ですべての場合は同一でなければならないから、境界条件

$$E_{0x} + E_{1x} = E_{2x} \quad \text{および} \quad H_{0x} + H_{1x} = H_{2x}$$

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y} \quad \text{および} \quad H_{0y} + H_{1y} = H_{2y}$$

が成立する。マクスウェルの方程式より、

$$-i\omega\epsilon_1 \epsilon_0 E_{0y} = iK_{0z} H_{0x}$$

$$i\omega\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1y} = iK_{1z} H_{0x}$$

が得られるので、 $K_{1z} = -K_{0z}$ が成立する。 $K_{0z} = K_0 \cos \psi_0$ より、式(3.62)の第1式を得る。

同様に、 $K_{2x} = K_{0x}$ が成立するので、

$$K_{2z} = \sqrt{K_2^2 - K_{2x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_{0x}^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 \epsilon_2 - (\omega/c)^2 \epsilon_1 \sin^2 \psi_0} = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \psi_0}$$

として式(3.62)の第2式が導かれた。

問題 3.8 斜め入射の場合のフレネル係数の式(3.67)を導け。

s波に対する解

電界と磁界の境界面上での連続性により、垂直入射の場合と同様に次の関係式が得られる。

$$E_1 = \{(K_{0z} - K_{2z}) / (K_{0z} + K_{2z})\} E_0$$

これに式(3.62)を代入すると、式(3.67)の第2式が得られる。

p波に対する解

p波においては、磁界が入射面に垂直なので、 \mathbf{H} ベクトルについて計算する方がよい。

H_x の連続性から

$$H_{0x} + H_{1x} = H_{2x}$$

とおける。一方、 E_y の連続性

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y}$$

は $-i\omega\epsilon_0 \epsilon_1 E_y = iK_z H_x$ などの式を使って H の式に書き直せる。

$$(K_{0z}/\epsilon_1)(H_{0x} - H_{1x}) = (K_{2z}/\epsilon_2)H_{2x}$$

ここに、 $K_{0z} = K_0 \cos \psi_0$; $\epsilon_1 = (c/\omega)^2 K_0^2$; $K_{2z} = K_2 \cos \psi_2$; $\epsilon_2 = (c/\omega)^2 K_2^2$ を代入して

$$K_0^{-1} \cos \psi_0 (H_{0x} - H_{1x}) = K_2^{-1} \cos \psi_2 H_{2x}$$

これと H_x について連続の式から

$$K_2 \cos \psi_0 (H_{0x} - H_{1x}) = K_0 \cos \psi_2 (H_{0x} + H_{1x})$$

これより、式(3.67)の第2式が導かれる。

問題 3.9 極カー効果のカー回転角 θ_k が式(3.79)、カー楕円率 η_k が式(3.80)で与えられることを証明せよ。

[解答] 入射光をz軸方向に進み、x方向に振動する直線偏光(振幅1)であると仮定する。すなわち

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{i} = E_0 \exp(-i\omega t) (\mathbf{r} + \mathbf{i}) / \sqrt{2}$$

右円偏光に対してはフレネル反射係数は $r^+ \exp(i\theta^+)$ で与えられ、左円偏光に対しては $r^- \exp(i\theta^-)$ であるとする、反射光は次のようになる。(ここで、左円偏光と右円偏光は、入射方向からみて定義されていることに注意)

$$E_{out} = (1/\sqrt{2}) \exp(-i\omega t) \{ r^+ \exp(i\theta^+) \mathbf{r} + r^- \exp(i\theta^-) \mathbf{l} \}$$

この式に $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$ および $\mathbf{l} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ を代入し、

$\Delta\theta = \theta^+ - \theta^-$, $\theta = (\theta^+ + \theta^-)/2$ および $\Delta r = r^+ - r^-$, $r = (r^+ + r^-)/2$ を用いて書き直すと

$$E_{out} = (1/\sqrt{2}) r \exp(-i\omega t + i\theta) \{ 2(\cos(\Delta\theta/2)) \mathbf{i} - \sin(\Delta\theta/2) \mathbf{j} \}$$

$$+i(\Delta r/r)(\sin(\Delta\theta/2)\mathbf{i}+\cos(\Delta\theta/2)\mathbf{j})\}$$

となる。ここで、 \mathbf{i}, \mathbf{j} を $-\Delta\theta/2$ だけ回転した座標系 \mathbf{i}', \mathbf{j}' を考えると、

$$\mathbf{i}' = \cos(\Delta\theta/2)\mathbf{i} - \sin(\Delta\theta/2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}' = \sin(\Delta\theta/2)\mathbf{i} + \cos(\Delta\theta/2)\mathbf{j}$$

であるから、 E_{out} は

$$E_{\text{out}} = (1/\sqrt{2})\exp(-i\omega t + i\theta)(2\mathbf{i}' + i(\Delta r/r)\mathbf{j}')$$

となって、主軸が x 軸から $-\Delta\theta/2$ だけ回転した楕円率 $\eta_K = (1/2)(\Delta r/r)$ の楕円偏光であることが証明される。反射の磁気円二色性 $\Delta R/R$ と $\Delta r/r$ の間には

$$\Delta R/R = (\Delta r^2)/(r^2) = 2r\Delta r/(r^2) = 2\Delta r/r$$

が成り立つので、 $\eta_K = (1/4)(\Delta R/R)$ と表すことができる。

問題 3.10 クラマース・クローニヒの関係式(3.75)を導け。

[ヒント]

線形応答関数 $f(\omega)$ が、図 3.11 に示す の複素平面上半面内で正則、かつ上半平面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$ 、さらに実数 ω に対し $f(-\omega) = f^*(\omega)$ 、 $f'(-\omega) = -f'^*(\omega)$ であるような性質を持っておればよい。このような条件が成り立つとき、コーシーの積分公式によって

$$if(\omega) = d\omega f(\omega')/(\omega' - \omega)$$

が成立する。 $f(\omega) = f(\omega) + if''(\omega)$ を代入し、両辺の実数部、虚数部がそれぞれ等しいとおくことによって導くことができる。

の複素平面上半面内で正則、かつ、上半平面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$ という条件は、 $t=0$ において外場が加えられたときの応答は $t>0$ におきるという因果律に対応している。

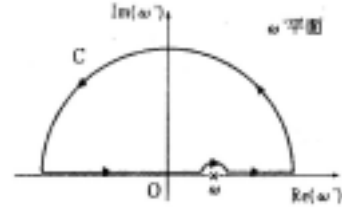


図 3.11

磁化の向きを y 軸にとり、光の進行方向を x 軸にとる。

問題 3.11 式(3.82)を証明せよ。

[ヒント]

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = -\frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{\Delta r}{2r} \approx i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.80)$$

に、式(3.77)を変形した

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\pm} &= \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} + n_0} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(1 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\varepsilon_{xx}}\right) - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(1 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\varepsilon_{xx}}\right) + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}} \\ &= \frac{1 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0)}}{1 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}(\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0)}} \approx 1 \pm \frac{i\varepsilon_{xy}}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0} \right) = 1 \pm \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}}(n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \end{aligned}$$

を代入し、 $\ln(1 \pm x) \approx \pm x$ という近似を使えばよい。

問題 3.12 式(3.83)を逆に解いて誘電率の非対角成分を θ と η で表す式を導け。

[ヒント] $A = n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)$ 、 $B = (n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)$ とおくと、

$n_0\varepsilon_{xy}' = A\theta_K - B\eta_K$ および、 $n_0\varepsilon_{xy}'' = B\theta_K + A\eta_K$ の関係が得られる。

$$\varepsilon_{xy}' = \{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\theta_K - \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\eta_K\}/n_0$$

$$\varepsilon_{xy}'' = \{\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\theta_K + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\eta_K\}/n_0$$

問題 3.13 ε_{xy} と θ_K および η_K との関係を与える式(3.83)を、 σ_{xy} についての式に書き改めよ。

[解答] $\sigma_{xy} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}$ を代入すればよい。

$$\sigma_{xy}' = \omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}'' = \omega\varepsilon_0\{\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\theta_K + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\eta_K\}/n_0$$

$$\sigma_{xy}'' = -\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}' = -\omega\varepsilon_0\{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\theta_K - \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\eta_K\}/n_0$$

が得られる。

この式を逆に解くことにより、次の式が求まる。

$$\theta_K = n_0 \frac{\varepsilon_0 \left\{ \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \sigma'_{xy} - n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \sigma''_{xy} \right\}}{\omega \left[(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2 \kappa^2 \right\} \right]}$$

$$\eta_K = n_0 \frac{\varepsilon_0 \left\{ n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \sigma'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \sigma''_{xy} \right\}}{\omega \left[(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4n_0^2 \kappa^2 \right\} \right]}$$

.....
 問題 3 . 1 4 複屈折による異常光線のエネルギーの伝搬方向が x 軸から
 $-\tan^{-1}(\frac{xy}{xx})$ だけ傾いていることを示せ .

[ヒント] 異常光線においては

$$E_1 = A \exp\{-i\omega(t - N_1 x/c)\} (\varepsilon_{xy} \mathbf{i} - \varepsilon_{xy} \mathbf{j})$$

と書ける . 一方 , マクスウェルの方程式

$$\text{rot} E_1 = -\mu_0 \text{d}H_1/\text{d}t$$

より

$$H_1 = (N/\mu_0 c) E_1 \times \mathbf{i}$$

が得られる . これをポインティングベクトルの式 $S = E \times H$ に代入して

$$S = -E_{1y}^2 \mathbf{i} + E_{1x} E_{1y} \mathbf{j} = E_{1x} E_{1y} (\varepsilon_{xx} \mathbf{i} - \varepsilon_{xy} \mathbf{j}) / \varepsilon_{xy}$$

となる . ε_{xy} が有限ならばポインティング・ベクトルは x 軸 (\mathbf{i}) から傾いたものになっていることがわかる .

第 3 章の参考文献

- 1) たとえば L.L.Landau and E.M.Lifshitz: Electromagnetism in Continuous Media 邦訳はランダウ ,リフシツツ「電磁気学 1 , 2」(井上 , 安河内 , 佐々木訳 , 東京図書) Chap.11. § 82 . 参照 .
- 2) たとえば P.N. Argyres: Phys. Rev. 97 (1955) 334. や H.S. Bennett and E.A. Stern: Phys. Rev. 137 (1964) A448. 参照 . 各々の論文によって誘電率テンソルの表記法や波動の表式に若干の相違がみられるので注意が必要である .
- 3) S. Wittekoek, T.J.A. Popma, J.M. Robertson and P.F. Bongers: Phys. Rev. **B12** (1975) 2777.
- 4) L.L. Landau and E.M. Lifshitz: 前掲書 § 66 .
- 5) F. Stern : Solid State Physics, ed. F. Seitz and D. Turnbull (Academic, 1963) Vol.15 , p299.
- 6) J.S.Toll: Phys. Rev. **104** (1956) 1760.
- 7) この式は基本的には文献 3 の(10)と(11)式と同じであるが , カー回転およびカー楕円率 の定義の違いにより異なった表式となっている .
- 8) D.Y. Smith: J. Opt. Soc. Amer. **66** (1970) 547.
- 9) 近桂一郎 : 「光マイクロ波磁気光学」 , 櫻井良文編 (丸善, 1975) による.
