

物性物理学特論A

— 第5回 電磁気学に基づく磁気光学の理論(3) 反射の磁気光学効果 —

佐藤勝昭

慶應義塾大学講師(非常勤)

東京農工大学名誉教授・工学府特任教授

(独)科学技術振興機構(JST)戦略的創造研究事業さきがけ

「革新的次世代デバイスを目指す材料とプロセス」研究総括

第4回に学んだこと

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の複素屈折率 N_{\pm}^2 は $\varepsilon_{xx} \pm i \varepsilon_{xy}$ で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応することを学びました。そして、 ε_{xy} が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じないことも学びました。
- 磁性体におけるファラデー回転角 θ_F およびファラデー楕円率 η_F は、左右円偏光に対する屈折率の差 Δn および消光係数の差 Δk を用いて表すことができることを学びました。
- さらに、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。
- ファラデー回転角とファラデー楕円率をそれぞれ実数部、虚数部とする複素ファラデー回転 Φ_F は、誘電率テンソルの非対角成分 ε_{xy} に比例し、対角成分 ε_{xx} の平方根に反比例することを学びました。

第5回に学ぶこと: 光と磁気第3章3.5、3.6

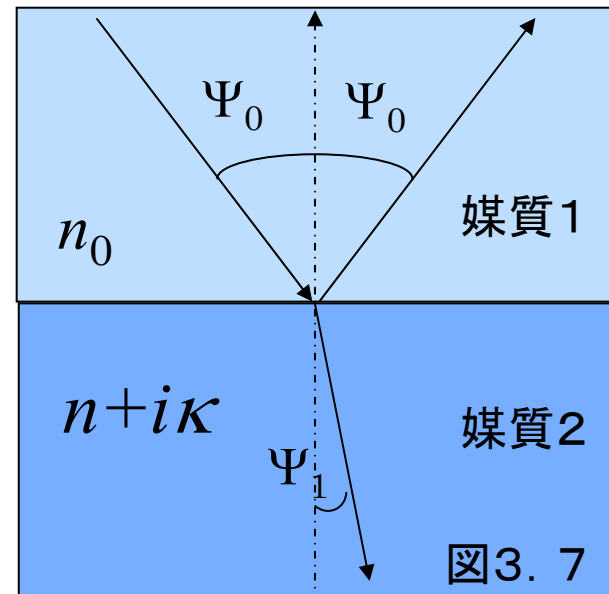
- 今回は、光が物質の表面で反射されたとき、光の強度、位相がどのような変化を受けるかを学びます。
- はじめに斜め入射の場合の反射の法則を導きます。
- 電界に対する反射率を複素振幅反射率(Fresnel係数)と呼びますが、これがp偏光(振動面が入射面内にある偏光)とs偏光(振動面が入射面と垂直であるような偏光)に対してどのように異なるかを導きます。
- ついで、偏光が磁化をもつ物質で反射されたときの磁気光学効果(磁気カー効果MOKE)について、誘電率テンソルを使って記述します。

光の反射

- 図3. 7のように媒質1から媒質2に向かって、平面波の光が入射するときの反射と屈折を考える。両媒質は均質であり、媒質1の屈折率は n_0 で、消光係数は0、媒質2の屈折率は n で、消光係数は κ であるとする。また、それぞれの媒質の誘電率を ε_1 、 ε_2 とする。従って、媒質1においては

$$\varepsilon_1 = n_0^2 \quad \text{が、媒質2においては}$$

$$\varepsilon_2 = (n + i\kappa)^2 \quad \text{が成立します。}$$



境界面から媒質2の中に向かう法線方向を z 軸にとります。光の入射面は xz 面内にあるとします。入射光と法線のなす角(入射角)を Ψ_0 、反射光の法線となす角を Ψ_1 、媒質2へと屈折する光の法線となす角を Ψ_2 とします。

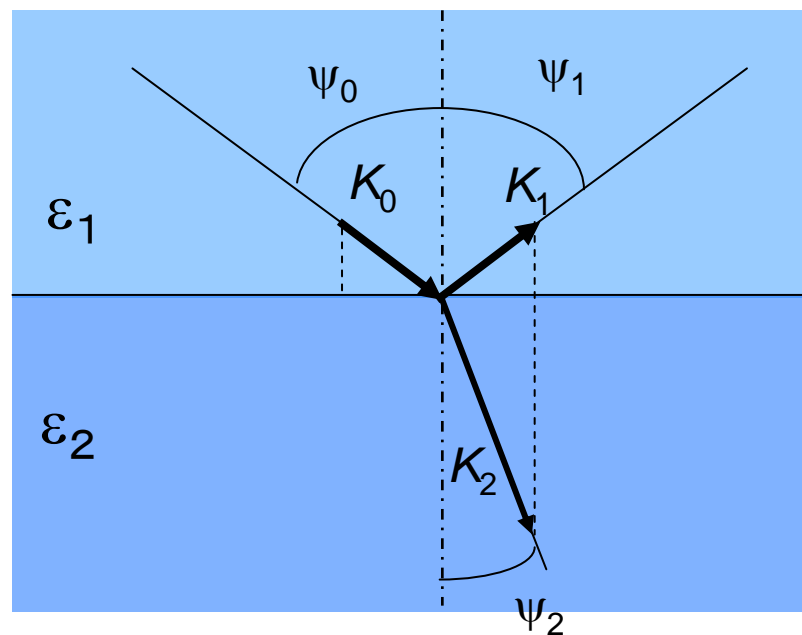
スネルの法則 — 波動ベクトルの連続性 —

- 入射光、反射光、屈折光の波数ベクトルをそれぞれ K_0 、 K_1 、 K_2 とすると、各媒質におけるマクスウェルの方程式を解いて、波数ベクトルの絶対値に成り立つ次の関係式を得ます。

$$K_0 = \frac{\omega}{c} \hat{N}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$K_1 = \frac{\omega}{c} \hat{N}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \quad (3.59)$$

$$K_2 = \frac{\omega}{c} \hat{N}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2}$$



マクスウェル方程式の固有解

$$\varepsilon_1 = N_1^2 \quad \varepsilon_2 = N_2^2$$

スネルの法則

- 境界面内での波数ベクトルの各成分の連続性から、 x 成分については

$$K_{0x} = K_{1x} = K_{2x} \quad (3.60)$$

が成り立ちます。従って

$$K_0 \sin \psi_0 = K_1 \sin \psi_1 = K_2 \sin \psi_2$$

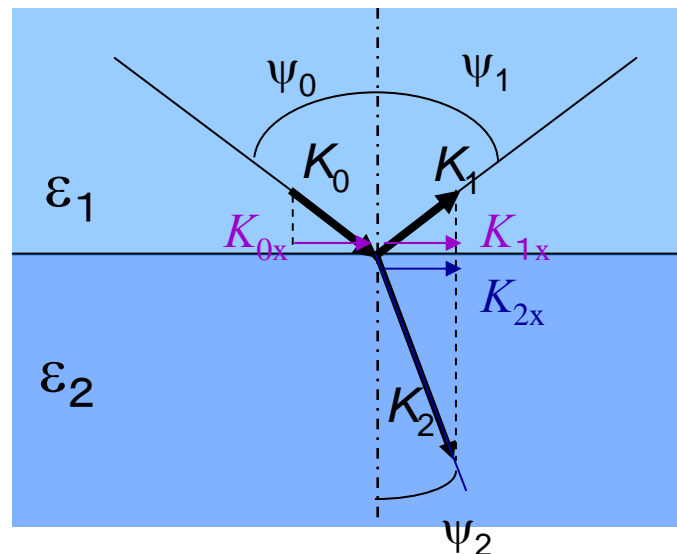
これより

$$\psi_0 = \psi_1$$

$$\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_0} = \frac{K_0}{K_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{\hat{N}_1}{\hat{N}_2} \quad (3.61)$$

スネルの法

- この第2式はいわゆるスネルの法則です。ただし、複素数に拡張されています。



z 成分については

$$\begin{aligned} K_{1z} &= -K_{0z} = -K_0 \cos \psi_0 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \psi_0 \\ K_{2z} &= \sqrt{K_2^2 - K_{2x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_{0x}^2} = \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} \\ &= \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \psi_0} \end{aligned} \quad (3.62)$$

斜め入射のフレネル係数を求める

- 媒体どうしの界面で反射が起きます。
- 境界条件のもとにマクスウェルの方程式を解いて入射光の電界と反射光の電界を求めます。
- p偏光、s偏光の反射の際の振幅・位相変化は入射角に依存します。複素振幅反射率をフレネル係数といいます。
- p偏光、s偏光の振幅反射率の比と位相差を使うと、光学定数が導かれます。

斜め入射の場合の反射

- 図3.8において、入射面(入射光と法線を含む面)を xz としたとき、この面に垂直な電界ベクトルの成分(y 成分)を E^S のように垂直を意味するドイツ語senkrechtの頭文字のSをつけて表し、入射面内の成分を E^P のようにP(parallel)をつけて表します。入射側には下付の添え字0をつけ、反射光には1、屈折光には2をつける。 x 成分、 y 成分をP成分、S成分を使って表しますと

$$E_{0x} = E_0^P \cos \psi_0, E_{0y} = E_0^S$$

$$E_{1x} = -E_1^P \cos \psi_0, E_{1y} = E_1^S \quad (3.63)$$

$$E_{2x} = E_2^P \cos \psi_2, E_{2y} = E_2^S$$

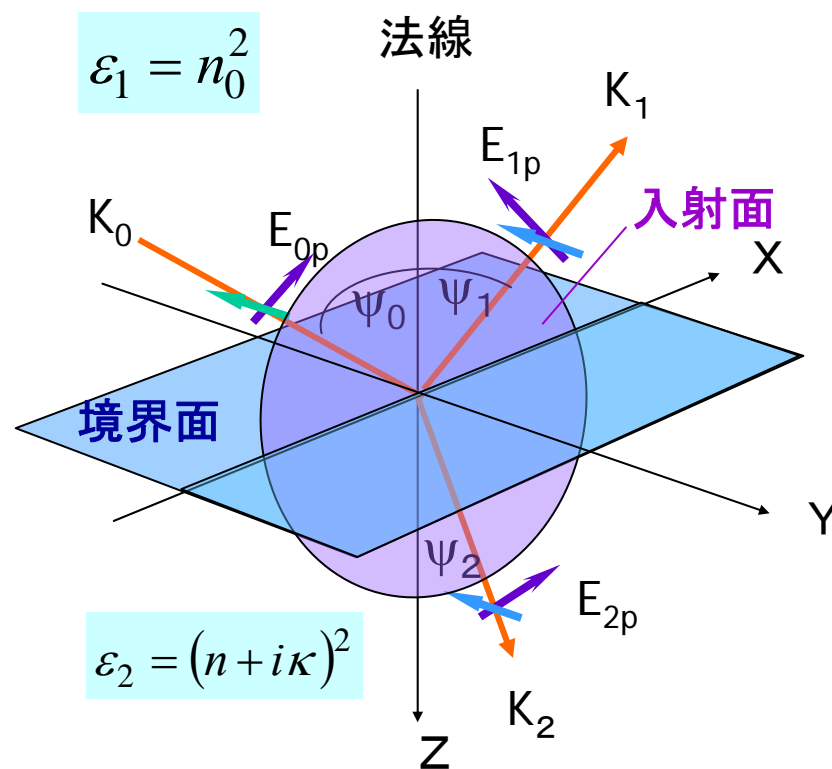
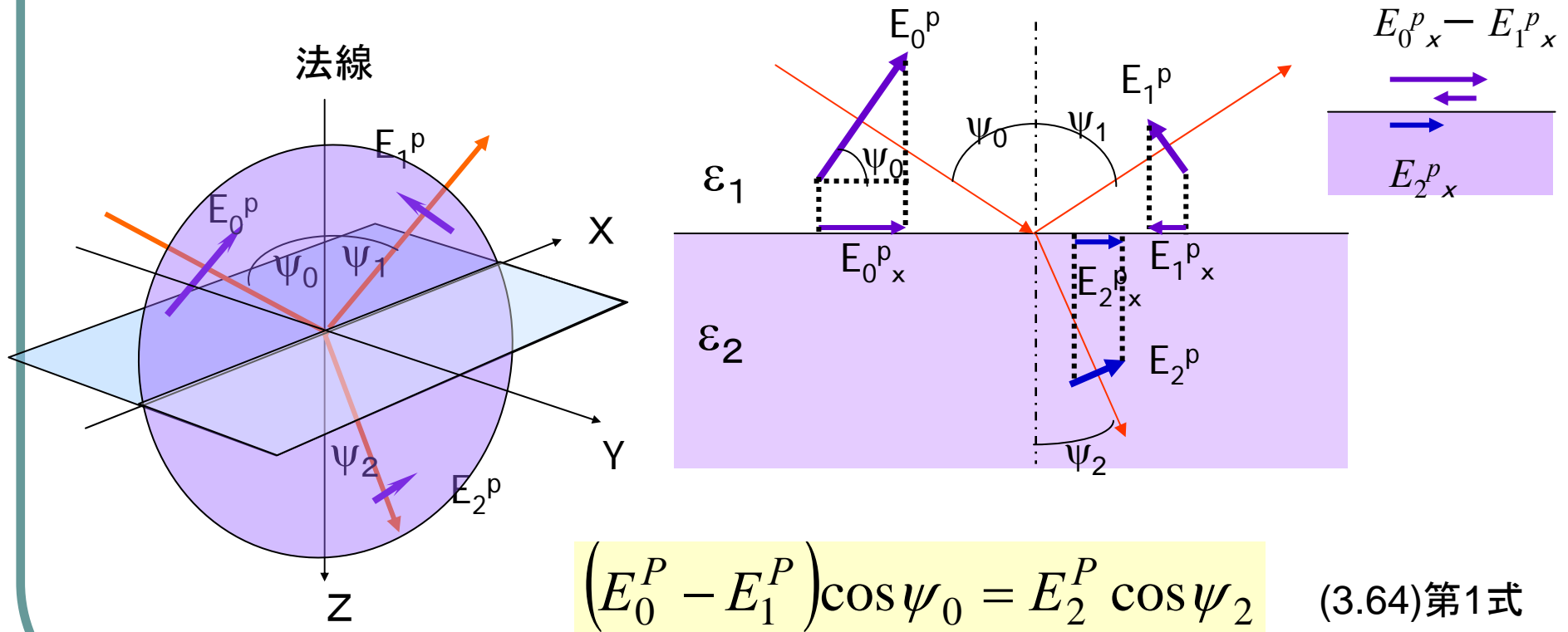


図3.8

電界・磁界の界面における連続性(1)

- 界面における電界p成分の連続性により

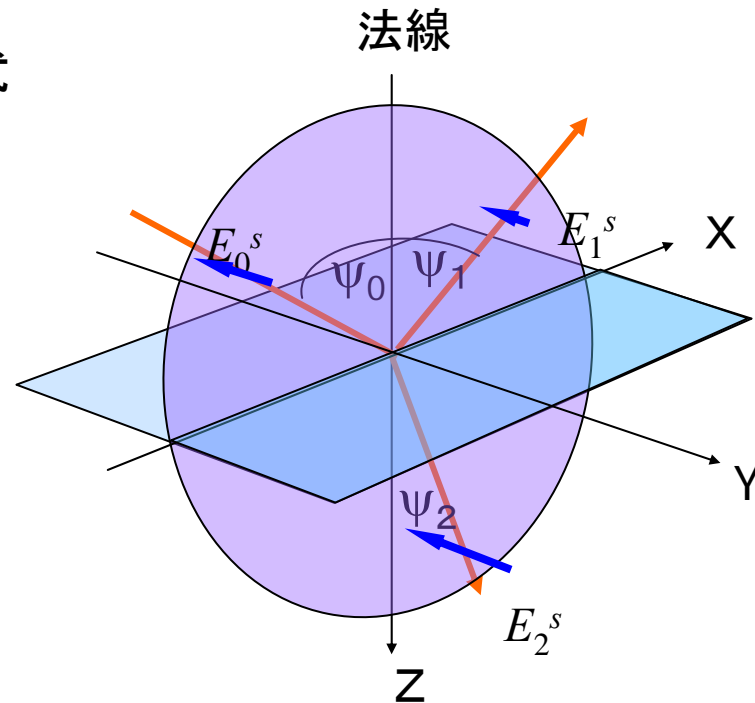
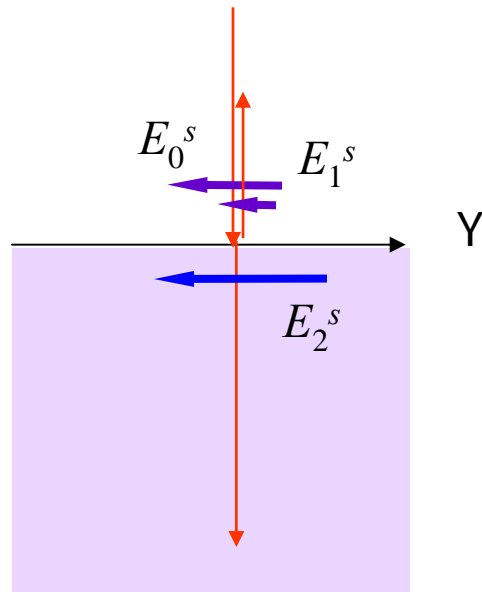


電界・磁界の界面における連続性(2)

- 界面における電界s成分の連続性は次式で表されます。

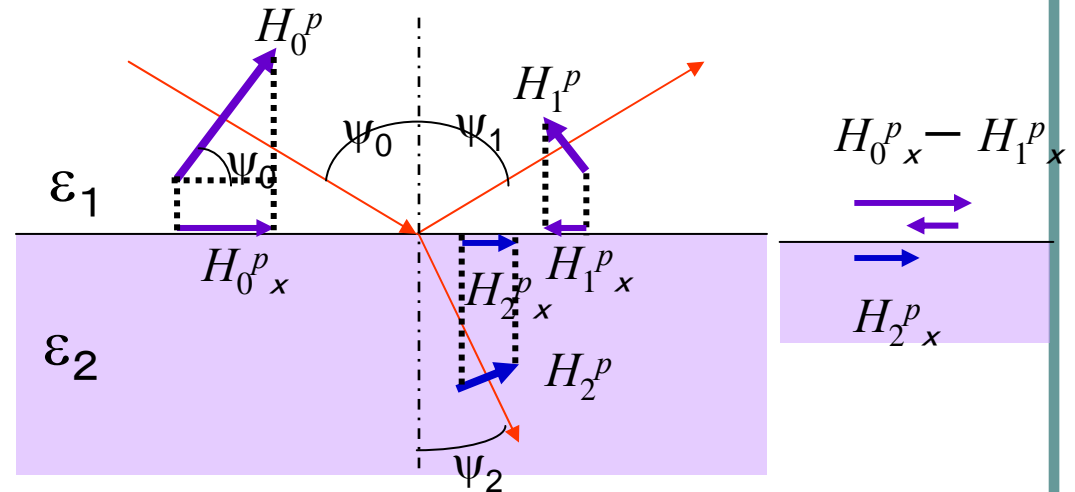
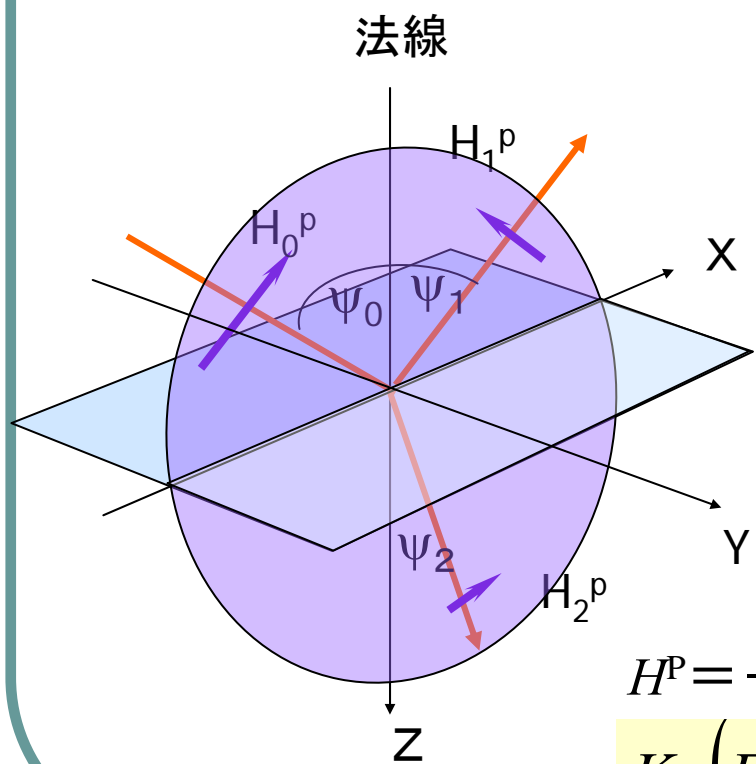
$$E_0^S + E_1^S = E_2^S$$

(3.64)第2式



電界・磁界の界面における連続性(3)

- 界面における磁界p成分の連続性



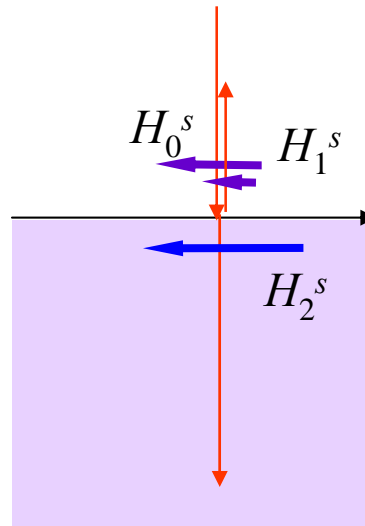
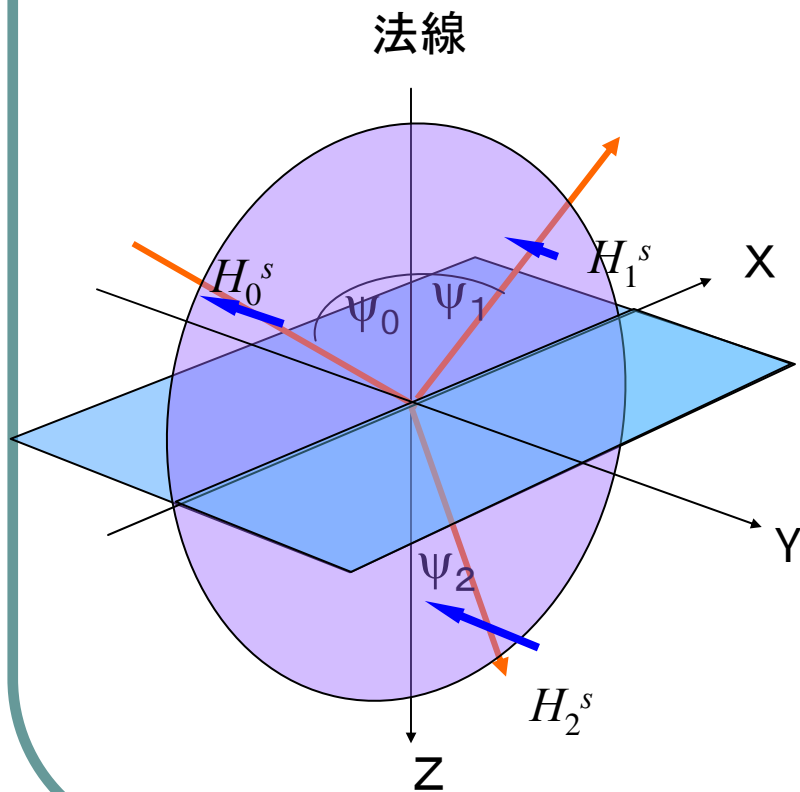
$$(H_0^P - H_1^P) \cos \psi_0 = H_2^P \cos \psi_2 \quad (3.65 \text{第1式})$$

$H^P = -(K/\omega\mu_0)E^S$ によって電界についての式に書き直す

$$K_0(E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 = K_2 E_2^S \cos \psi_2 \quad (3.66 \text{第1式})$$

電界・磁界の界面における連続性(4)

- 界面における磁界s成分の連続性



$$H_0^S + H_1^S = H_2^S$$

(3.65第2式)

$H^S = (K/\omega\mu_0)E^P$ によって
電界についての式に書き直します。

$$K_0(E_0^P + E_1^P) = K_2E_2^P \quad (3.66第2式)$$

電界と磁界の界面における連続性(5)

$$(E_0^P - E_1^P) \cos \psi_0 = E_2^P \cos \psi_2 \quad (3.64)$$

$$E_0^S + E_1^S = E_2^S$$

$$K_0 (E_0^S - E_1^S) \cos \psi_0 = K_2 E_2^S \cos \psi_2 \quad (3.66)$$

$$K_0 (E_0^P + E_1^P) = K_2 E_2^P$$

連立方程式を解く

- E_2^P を消去

$$(K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2) E_0^P - (K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2) E_1^P = 0$$

- E_2^S を消去

$$(K_2 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0) E_0^S + (K_2 \cos \psi_2 - K_0 \cos \psi_0) E_1^S = 0$$

複素振幅反射率(Fresnel係数)

Fresnel係

P偏光の反射

$$r_p = \frac{E_1^P}{E_0^P} = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2}$$

$$= \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0^2 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)}$$

S偏光の反射

$$r_s = \frac{E_1^S}{E_0^S} = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2}$$

$$= \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}$$

(3.67)

ここに、 $r_p = |r_p| e^{i\delta_p}$ 、 $r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$ です。

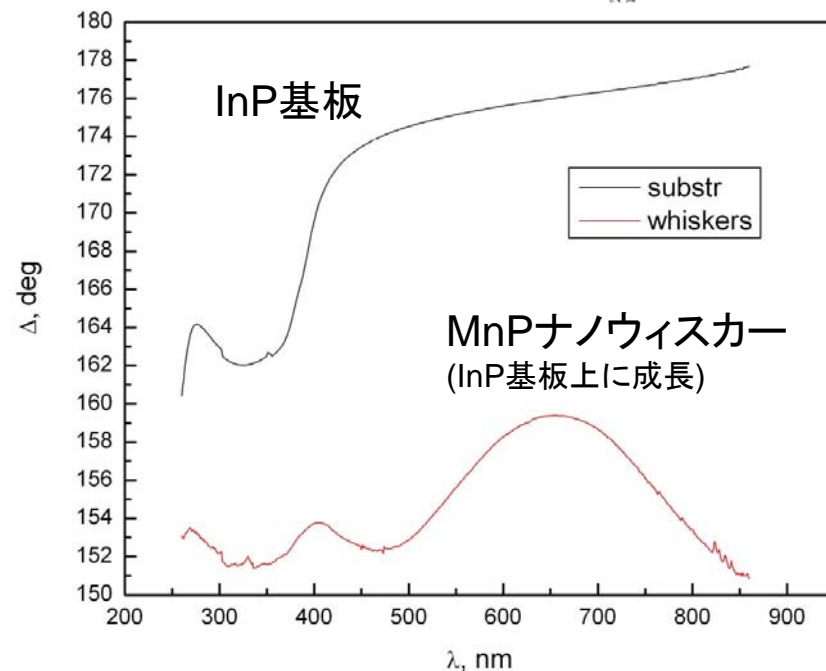
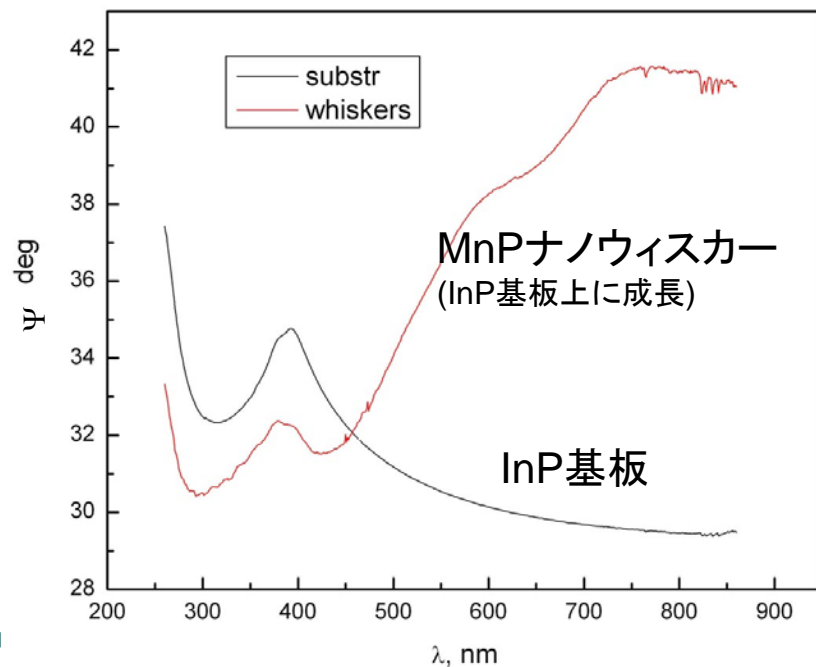
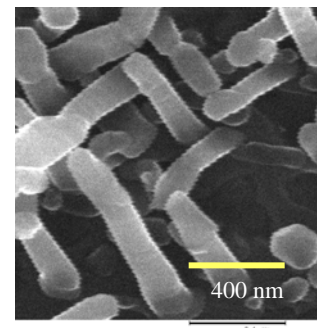
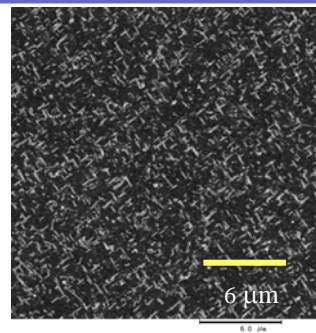
エリプソメトリ(偏光解析)

$$\frac{r_s}{r_p} = -\frac{\cos(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 + \psi_2)} = \left| \frac{r_s}{r_p} \right| \exp(i\delta) \equiv \tan \rho \exp(i\delta) \quad (3.68)$$

- ρ azimuth (方位角)(Ψ と書くことも)
- δ phase (位相差) (Δ と書くことも)
- 反射は方位角 ρ と位相差 $\delta = \delta_p - \delta_s$ によって記述できます。
- 反射光は一般には楕円偏光になっていますが、そのp成分とs成分の逆正接角 ρ と位相差 δ を測定すれば ϵ_r が求められます。(測定には1/4波長板と回転検光子を用います。) この方法を偏光解析またはエリプソメトリといいます。

分光エリプソメトリのデータ例

- InP上に成長したMnPウィスカーの集合



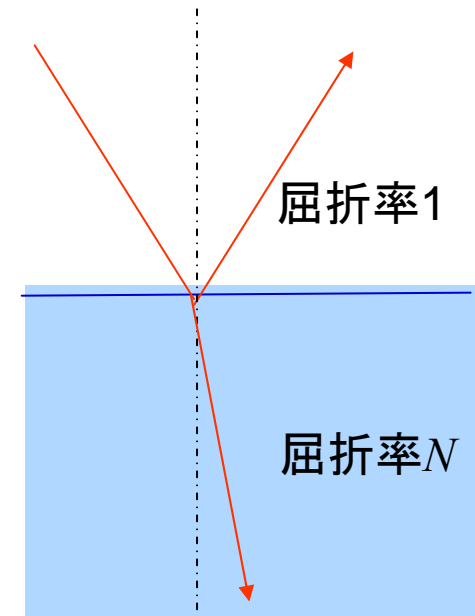
P偏光反射率とS偏光反射率

- 光強度についての反射率 R は $|r|^2$ で与えられます。第1の媒体が真空、第2の媒体の複素屈折率が N の場合、

$$R_p = \left| \frac{\hat{N}^2 \cos \psi_0 - \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}}{\hat{N}^2 \cos \psi_0 + \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2$$

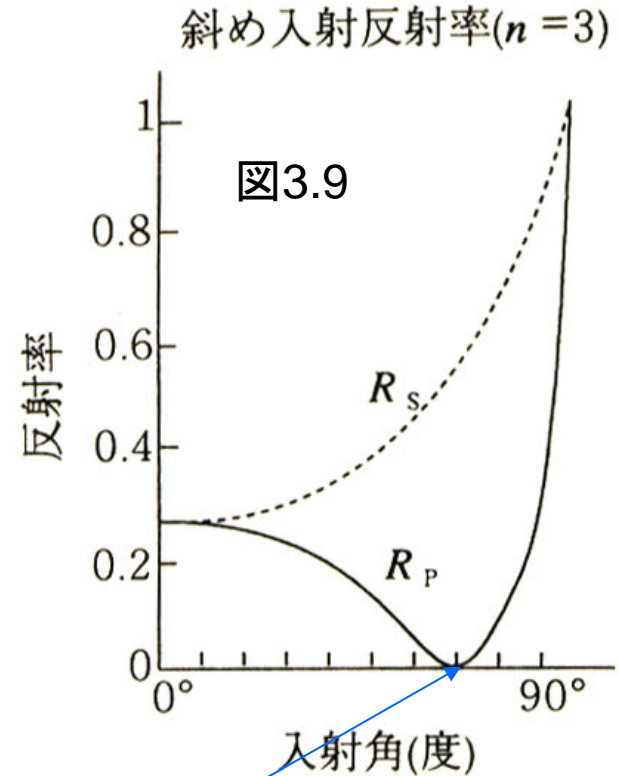
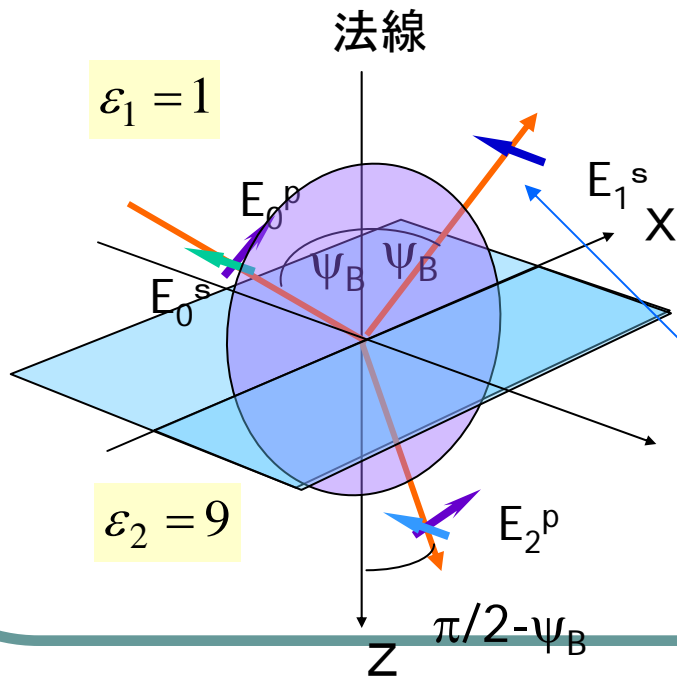
(3.70)

$$R_s = \left| \frac{\cos \psi_0 - \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}}{\cos \psi_0 + \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2$$



入射角に依存する反射率

- 式(3.69)にもとづいて $N=3+i0$ の場合について、 R_p 、 R_s をプロットすると図3.9のようになります。
- R_p は入射角 70° 付近で0となっていることがわかります。この入射角をブリュースター角と呼びます。



ブリュースター角のとき、s偏光のみが強く反射されます。

自習課題

(今回提出の必要はありませんが、ぜひやってみてください)

- 式(3.70)にもとづき、 $N=2.5+i1.0$ の場合の R_p , R_s の入射角依存性を計算して図3.9のようなグラフを描いてください。 R_p , R_s はそれぞれp偏光、s偏光に対する光強度の反射率です。

$$R_p = \left| \frac{\hat{N}^2 \cos \psi_0 - \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}}{\hat{N}^2 \cos \psi_0 + \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2$$

$$R_s = \left| \frac{\cos \psi_0 - \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}}{\cos \psi_0 + \sqrt{\hat{N}^2 - \sin^2 \psi_0}} \right|^2$$

(3.70)

知っていますか？エクセルで複素演算ができることを？

- 複素演算を使うには、分析ツールをONにしておかなければなりません。
- 複素数については、通常の $\pm, *, /$ などが使えません。
 - 加算はIMSUM, 減算はIMSUB, 積算はIMPRODUCT, 除算はIMDIVを使います。
 - たとえば、セルG1に実数部が、セルH1に虚数部があったとき、この複素数はCOMPLEX(G1,H1)と表します。
 - 虚数単位 i はCOMPLEX(0,1)と表します。
 - 複素数の指数関数はIMEXPという関数を使います。

反射と偏光 : Brewster角

$$R_p = \left| \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2 \quad (3.69)$$

$$R_s = \left| \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} \right|^2$$

- もし、 $\psi_0 + \psi_2 = \pi/2$ であれば、 \tan が発散するため、 R_p は0となります。
- このとき、反射光はS偏光のみとなります。
- このときの入射角をBrewster angle(ブリュースター角)といいます。

垂直入射のFresnel係数

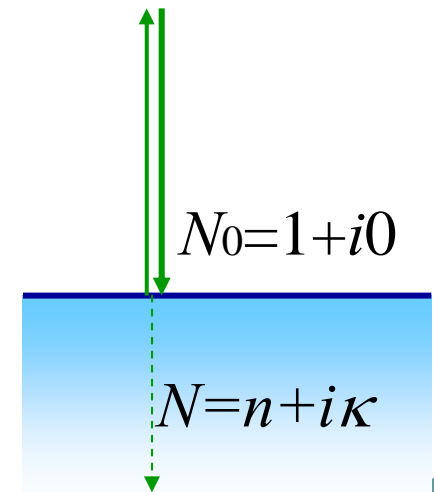
- 垂直入射の場合、 $\psi_0=0$ 、従って $\psi_1=0$ 。このとき電界に対するFresnel係数 r として、

$$\hat{r} = \hat{r}_p = \frac{K_2 - K_0}{K_2 + K_0} = \frac{N_2 - N_0}{N_2 + N_0} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} \quad (3.70)$$

を得ます。これより、媒質1が真空($N_0=1+i0$)のとき

$$r = \frac{N - 1}{N + 1} = \frac{n + i\kappa - 1}{n + i\kappa + 1} \equiv \sqrt{R} \exp(i\theta)$$

を得ます。



垂直入射の光強度反射率と位相

- $R=r^*r=|r|^2$ は光強度の反射率、 θ は反射の際の位相のずれを表します。

$$R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2} \quad (3.73)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1}$$

逆に解いて

$$n = \frac{1-R}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta}$$

$$\kappa = \frac{2\sqrt{R}\sin\theta}{1+R-2\sqrt{R}\cos\theta} \quad (3.74)$$

Rを誘電率で表すと $R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_2} - 1}{\sqrt{\epsilon_2} + 1} \right|^2 \quad (3.73')$

反射率と位相

- 位相のずれは、反射スペクトルからKramers-Kronig(クラマースクローニヒ)の関係を使って求めることができます。

$$\theta(\omega) = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln R(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (3.77)$$

Kramers-Kronig の関係

- 応答を表す物理量の実数部と虚数部の間に成立（ P は積分の主値を表す。）

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ij}(\omega) &= 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \varepsilon''_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \varepsilon''_{ij}(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon'_{ij}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\end{aligned}\tag{3.75}$$

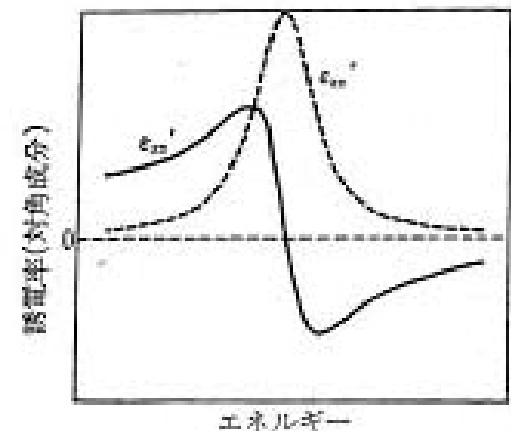
$$P \int_0^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{\omega - \rho} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\omega + \rho}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

KK変換の微分性

- 第2式を部分積分すると

$$\varepsilon''_{ij}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \varepsilon'_{ij}(\omega') \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{\omega - \omega'}{\omega + \omega'} \right| \frac{d\varepsilon'_{ij}(x)}{dx} dx \quad (3.76)$$

- 右辺の第1項は0であるから、結局第2項のみとなる。非積分関数は $\omega' \sim \omega$ 付近で大きい値をとるので、 ε'' は ε' の微分形に近いスペクトル形状を示すことになる。
- ε' がピークを持つ ω では ε'' は急激に変化し、 ε' が急激に変化する ω 付近で ε'' は極大(または極小)を示す。



KK変換の微分性(磁気光学)

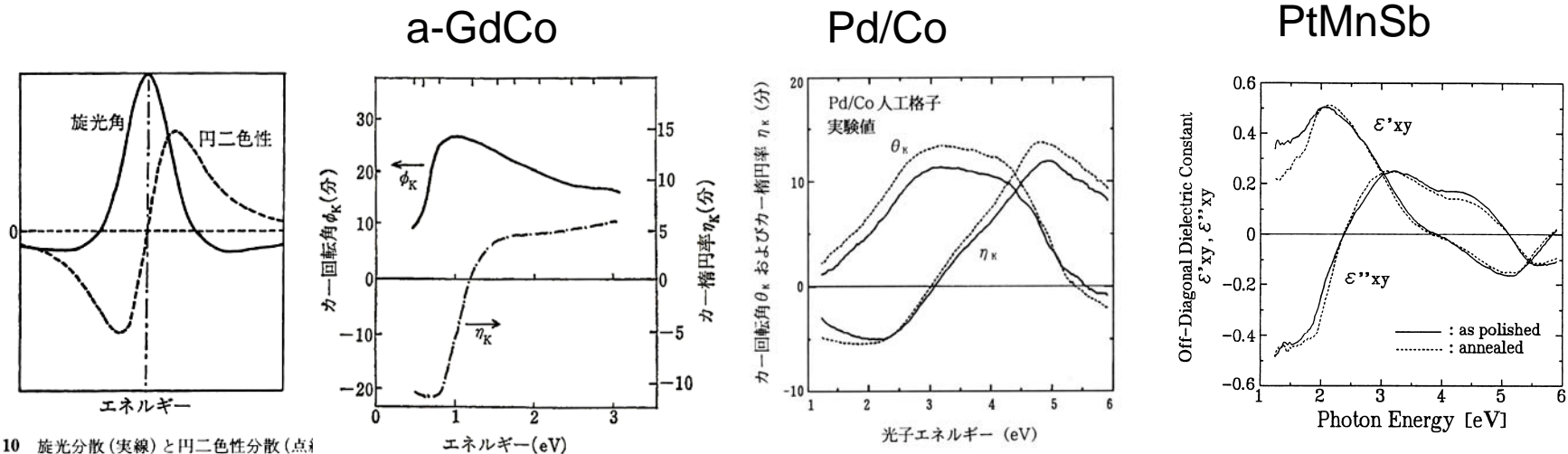
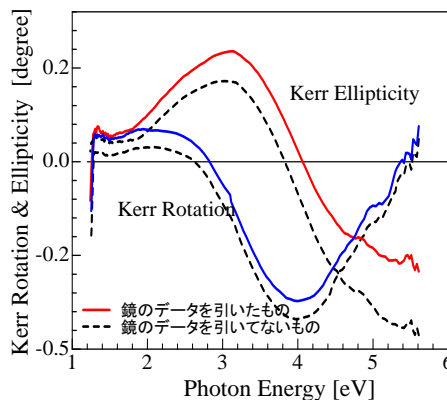


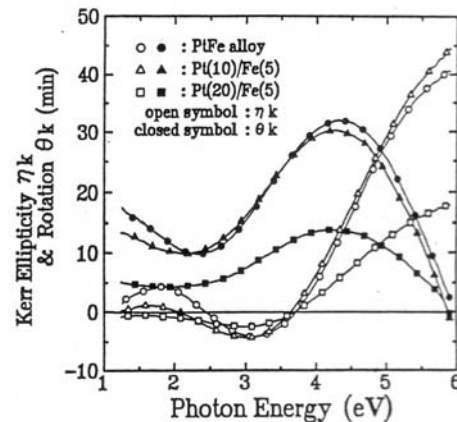
図 2.10 旋光分散 (実線) と円二色性分散 (点線)

図の出典は、すべて、
佐藤の研究成果の
データを使っています。

NdFeB

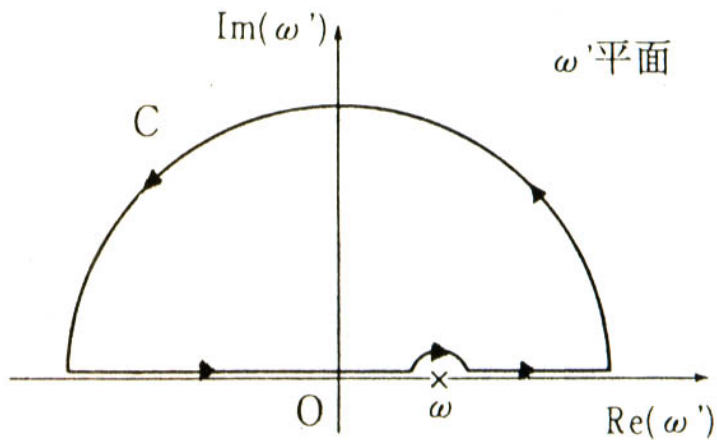


Pt/Fe



K-K関係の数学的説明

- 線形応答関数 $f(\omega)$ が、図に示す ω の複素平面の上半面内で正則、かつ上半面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$ 、さらに実数 ω に対し $f'(-\omega) = f'(\omega)$ 、 $f''(-\omega) = -f''(\omega)$ であるような性質を持っておればよい。このような条件が成り立つとき、コーシーの積分公式によって $\pi if(\omega) = \oint d\omega' f(\omega') / (\omega' - \omega)$ が成立します。



$$\oint \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega = 0$$

$-i\pi f(\omega)$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega-r} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} if(\omega + re^{i\theta}) d\theta$$

$$+ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\omega+r}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} if(Re^{i\theta}) d\theta = 0$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - \pi if(\omega) = 0$$

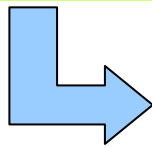
0

つづき

- $f(\omega) = f'(\omega) + if''(\omega)$ を代入し、両辺の実数部、虚数部がそれぞれ等しいとおくことによって導くことができる。
- ω の複素平面の上半面内で正則、かつ、上半平面で $|\omega| \rightarrow \infty$ において $|f(\omega)| \rightarrow 0$ という条件は、 $t=0$ において外場が加えられたときの応答は $t > 0$ におきるという因果律に対応している。

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = -\pi i f(\omega) \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\omega') + if''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \pi i (f'(\omega) + if''(\omega)) = -\pi (f''(\omega) - if'(\omega))$$

$$\begin{aligned} -\pi f''(\omega) &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_{-\infty}^0 \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = P \int_0^{\infty} \frac{f'(-\omega')}{-\omega' - \omega} d(-\omega') + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= -P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' + P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 2\omega P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned}$$



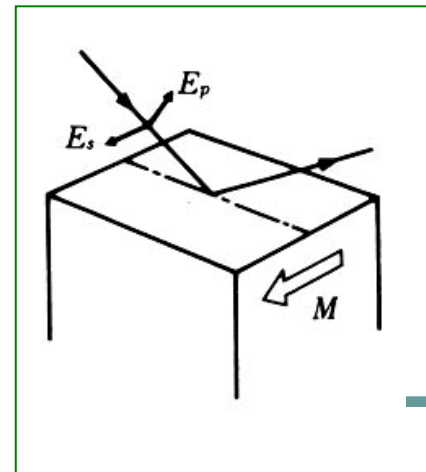
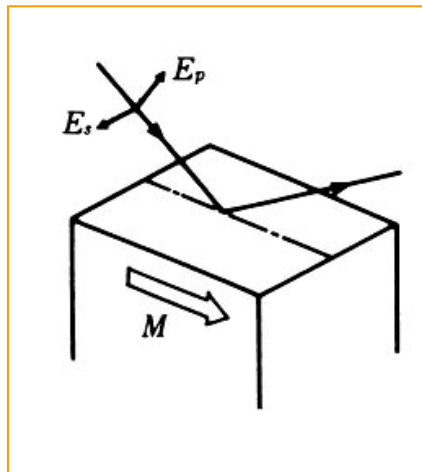
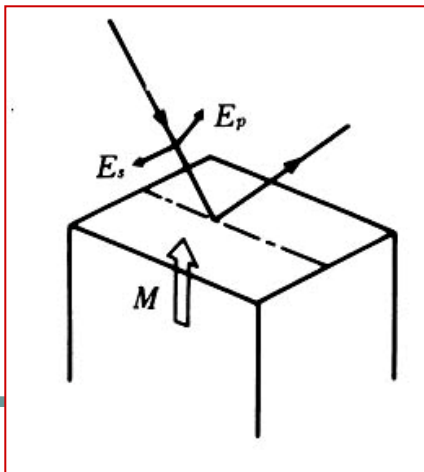
$$f''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{f'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

磁気光学Kerr効果

- 反射の磁気光学効果を磁気光学カー効果(MOKE)といいます。
- 右回り円偏光に対するFresnel係数と左回り円偏光に対するFresnel係数の差を考えます。
 - 位相の差からKerr回転角が導かれます。
 - 振幅の差からKerr 楕円率が導かれます。

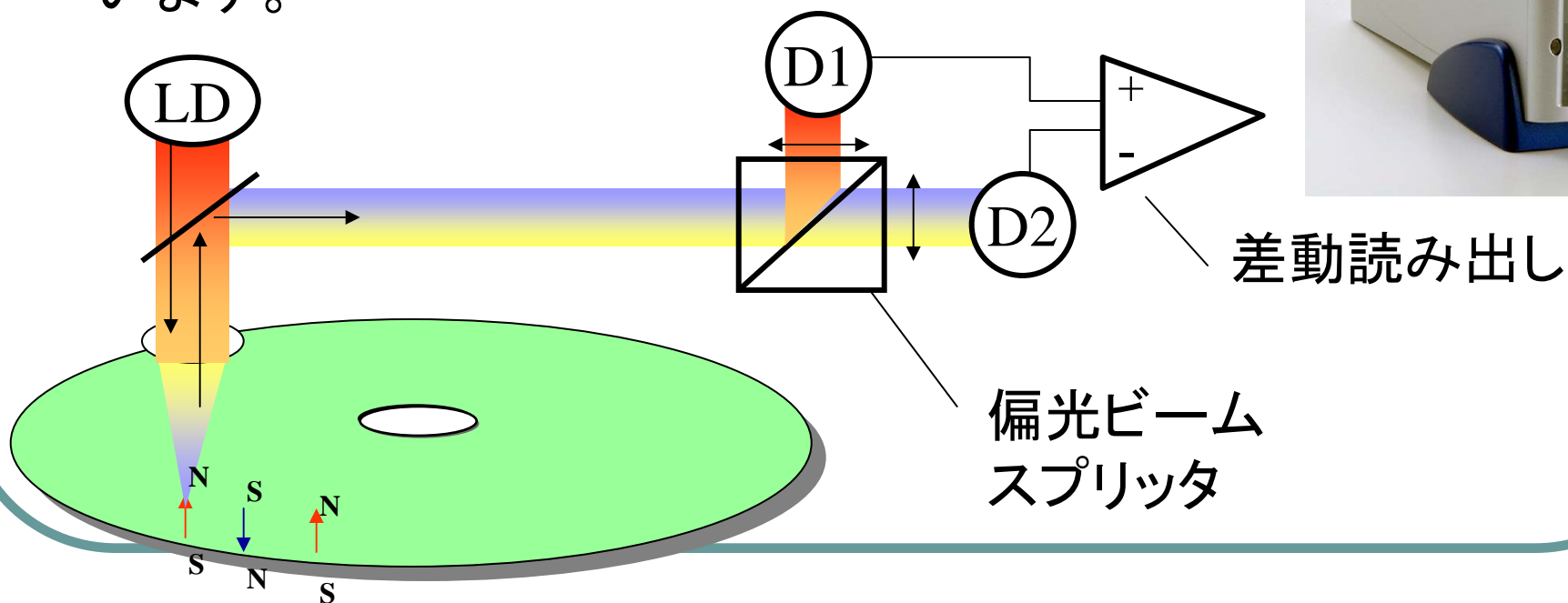
3種類の磁気カー効果

- MO-Kerr 効果には、3種類があります。
 - **極カー効果** (磁化が反射面の法線方向、直線偏光は傾いた楕円偏光となる)
 - **縦カー効果** (磁化が試料面内 & 入射面内、直線偏光は傾いた楕円偏光となる)
 - **横カー効果** (磁化が試料面内、入射面に垂直偏光の回転はないが磁界による強度変化)



MOディスクの読み出しに使われるカー効果

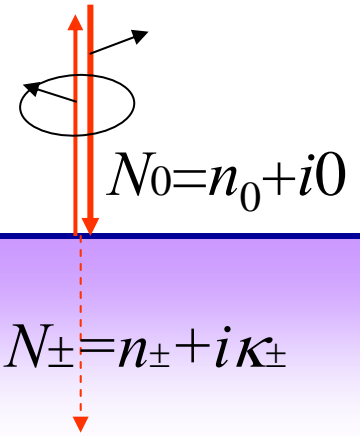
- MOディスクやMDでは、磁気ディスクで反射した偏光の回転を電気信号に変えて磁気情報を読み出しています。



垂直入射の場合の極カー効果

- 問題を複雑にしないために、**極カー効果**の場合を扱い、しかも入射光は界面に垂直に入射するものとします。
- 極カー効果は直線偏光が入射したとき、反射光が楕円偏光となり、その楕円の長軸の向きが入射光の偏光方向に対して回転する現象です。
- この回転をカー回転角 θ_K で表し、楕円の長軸と短軸の比を楕円率 η_K で表します。
- カー回転角は右円偏光と左円偏光に対する移相量の差に対応し、楕円率は左右円偏光に対する反射率の違いから生じることを示すことができます。

Kerr効果



- 右円偏光および左円偏光に対する垂直振幅反射率は

$$\hat{r}_{\pm} = \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} \quad (3.78)$$

によって表すことができます(ここに n_0 は入射側媒体の屈折率です). 複素振幅反射率(フレネル係数)を右円偏光に対して $r_+ \exp(i\theta_+)$ 、左円偏光にして $r_- \exp(i\theta_-)$ とすると、カー回転角 φ_K は

$$\varphi_K = \frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \equiv \frac{\Delta\theta}{2} \quad (3.79)$$

で与えられます. また、カー楕円率 η_K は次式で与えられます。

$$\eta_K = -\frac{|r_+| - |r_-|}{|r_+| + |r_-|} \equiv -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad (3.80)$$

複素力一回転

- 磁気力一回転角 φ_K と磁気力一楕円率 η_K をひとまとめにした複素力一回転 Φ_K を考えます。

$$\Phi_K = \varphi_K + i\eta_K = \frac{\Delta\theta}{2} - i\frac{\Delta r}{2r} = -i\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta\right)$$

$$\hat{r} = re^{i\theta}$$

$$\Delta\hat{r} = \Delta re^{i\theta} + ire^{i\theta} \Delta\theta$$

$$\frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}} = \frac{\Delta re^{i\theta} + ire^{i\theta} \Delta\theta}{re^{i\theta}} = \frac{\Delta r}{r} + i\Delta\theta$$

$$\Phi_K = -i\frac{\Delta\hat{r}}{2\hat{r}} \approx i\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{\Delta\hat{r}}{\hat{r}}\right) \approx i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \Delta\hat{r}/2\hat{r}}{1 + \Delta\hat{r}/2\hat{r}}\right) = i\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+}\right) \quad (3.81)$$

複素カー一回転を誘電率で表す(1)

- 結果を先に述べておくと、式(3.81)と式(3.77)とから、次式を得ます。

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.82)$$

● この式は、カー効果が誘電率の非対角成分 ε_{xy} に依存するばかりでなく、分母に来る対角成分 ε_{xx} にも大きく依存することを表している重要な式です。

● 次のスライドで詳しい導き方を説明します。

式(3.82)の誘導

(3.78)

- r_{\pm} を N_{\pm} を使って表し、 N_{\pm} に $\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\pm} &= \frac{N_{\pm} - n_0}{N_{\pm} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}} + n_0} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / \varepsilon_{xx})} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / \varepsilon_{xx})} + n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\varepsilon_{xx}) - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\varepsilon_{xx}) + n_0} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0} \cdot \frac{1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}} (\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0)}{1 \pm i\varepsilon_{xy} / 2\sqrt{\varepsilon_{xx}} (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0)} \approx \hat{r} \left\{ 1 \mp \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right\} \end{aligned}$$

(ここに、 $\hat{r} = (\sqrt{\varepsilon_{xx}} - n_0) / (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + n_0)$ は、偏光を考えないときのフレネル係数です)

が得られますから、式(3.81)に代入すると式(3.82)となります。

$$\Phi_K = i \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\hat{r}_-}{\hat{r}_+} \right) = i \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\hat{r} \left(1 + \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right)}{\hat{r} \left(1 - \frac{in_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right)} \right) \approx i \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{i2n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})} \right) \approx \frac{n_0\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} (n_0^2 - \varepsilon_{xx})}$$

(3.82)

テーラー展開による近似

- (3.82)を導くにあたって、 x が小さいとき成立する次の近似式を使いました。

$$\sqrt{1+x} \approx 1+x/2,$$

$$1/(1+x) \approx 1-x,$$

$$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

複素カー一回転を誘電率で表す(2)

- この式の対角成分 ε_{xx} を光学定数 n , κ によって表すと,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + i\varepsilon''_{xx} = (n^2 - \kappa^2) + i2n\kappa$$

と書けますから, (3.81)に代入して整理することによって, 次のような面倒な式を得ます。

$$\theta_K = n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2\}} \quad (3.83)$$
$$\eta_K = n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2)\{(n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2\}}$$

カー一回転角・楕円率は ε'_{xy} と ε''_{xy} の1次結合で表される。

自習課題

(今回提出する必要はありません。)

- 式(3.81)から式(3.82)を導いてください。

$$\Phi_K \approx \frac{n_0 \varepsilon_{xy}}{(n_0^2 - \varepsilon_{xx}) \sqrt{\varepsilon_{xx}}} \quad (3.82)$$

- 式(3.82)から式(3.83)を導いてください。

$$\begin{aligned} \theta_K &= n_0 \frac{n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \varepsilon'_{xy} + \kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \right\}} \\ \eta_K &= n_0 \frac{-\kappa(n_0^2 - 3n^2 + \kappa^2) \varepsilon'_{xy} + n(n_0^2 - n^2 + 3\kappa^2) \varepsilon''_{xy}}{(n^2 + \kappa^2) \left\{ (n_0^2 - n^2 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \right\}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

複素カ一回転を誘電率で表す(3)

- 真空中から光が入射する場合、 $n_0=1$ として、下の式で書けます。

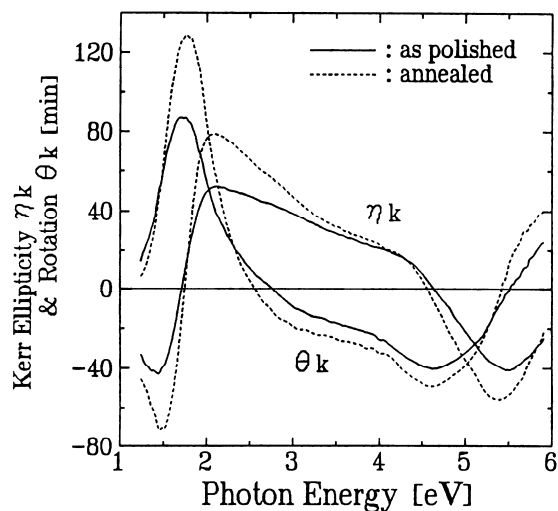
$$\theta_K = \frac{n(1-n^2+3\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + \kappa(1-3n^2+\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2+\kappa^2)\left((1-n^2-\kappa^2)^2+4\kappa^2\right)}$$
$$\eta_K = \frac{-\kappa(1-3n^2+\kappa^2)\varepsilon'_{xy} + n(1-n^2+3\kappa^2)\varepsilon''_{xy}}{(n^2+\kappa^2)\left((1-n^2-\kappa^2)^2+4\kappa^2\right)}$$
(3.83')

プラズマ・エンハンスメント

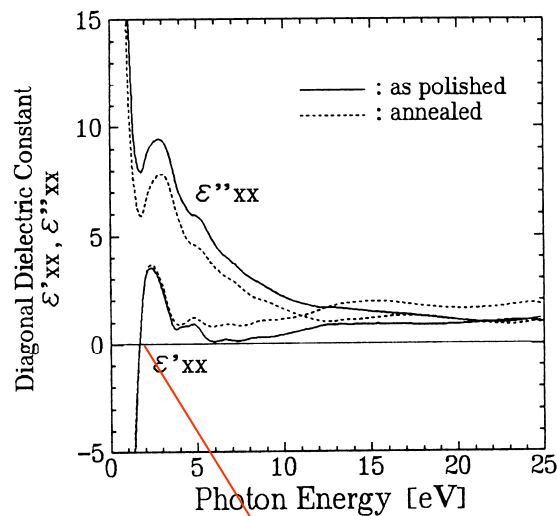
$$\Phi_K \approx \frac{\varepsilon_{xy}}{(1 - \varepsilon_{xx})\sqrt{\varepsilon_{xx}}}$$

- いままで述べたように、複素カー回転角は誘電率の非対角成分だけでなく、対角成分にも関係します。
- プラズマ振動数においてエンハンス(増大)が起きます。
- 例: PtMnSb単結晶のカー回転スペクトルのピーク

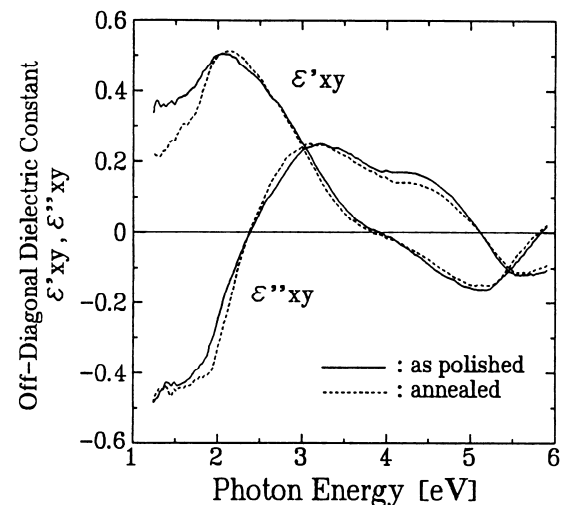
カー回転 θ_K と楕円率 η_K



誘電率対角成分



誘電率非対角成分



斜め入射の極力一効果の式

- 入射角 φ_0 で斜め入射した直線偏光の極力一複素回転角 Φ は、

$$\tan \Phi_K = \frac{r_{sp}}{r_{pp}} = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon_{xx}} \left(\cos \varphi_0 + \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 \right) \left(\cos \varphi_2 - \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.88)$$

であらわすことができます。ここに φ_2 は媒体内への屈折角です。

φ_0 と φ_2 との間にはスネルの法則が成立します。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

縦カー効果の式

- 入射角 φ_0 で入射した直線偏光の受ける複素カー効果は、次式で表されます。

$$\tan \Phi_K = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \varphi_0 \sin \varphi_2}{\varepsilon_{xx} \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_2 \right) \left(\sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi_2 + \cos \varphi_0 \right)} \quad (3.91)$$

φ_0 と φ_2 の間にはスネルの法則が成立します。すなわち、

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{xx}}}{n_0}$$

第5回のまとめ

- 斜め反射の場合の反射率を屈折率、消光係数および入射角を用いて表しました。
- 反射率からクラマースクローニヒの式によって屈折率や消光係数が求められることを示しました。
- 反射の磁気光学効果である磁気カー効果が生じた誘電率テンソルの対角・非対角成分で表されることを学びました。

第5回の課題

- 真空からある磁性体に光が垂直に入射する場合の、光強度の反射率 R 、カー一回転角 θ_K 、カー楕円率角 η_K を求めてください。ただし、この磁性体の誘電率の対角成分、非対角成分は、それぞれ、 $\varepsilon_{xx}=6+2.5i$, $\varepsilon_{xy}=0.5-0.2i$ で与えられるとします。
- ヒント: 垂直入射の反射率 R は、式(3.73)で与えられます。また、複素カー一回転角 $\Phi_K = \theta_K + i\eta_K$ は、式(3.82)で表されます。なお、真空からの入射なので $n_0=1$ です。
- なお、屈折率 n と消光係数 κ は、下式で計算できます。

$$n = \sqrt{\frac{|\varepsilon_{xx}| + \varepsilon'_{xx}}{2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{|\varepsilon_{xx}| - \varepsilon'_{xx}}{2}} \quad \text{ここに} \quad |\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon''^2_{xx}}$$