1. 遅延ポテンシャル

運動する電荷 (加速運動)
$(\phi, \boldsymbol{A})$ の波動方程式 (Lorentz gauge)

$$\triangle\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

$$\triangle\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{j} \tag{2}$$

Lorentz gauge

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

色々な運動に対してどの様な電磁波が現れるか。

(1) を解く。

step1. ρ, ϕ の t に関する Fourier 変換を考える。

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \int \mathrm{d}\omega\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t} \tag{4}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \int \mathrm{d}\omega\, \phi_\omega(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t} \tag{5}$$

積分の区間は $(-\infty, \infty)$ である。因みに逆変換は

$$\rho_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}t\, \rho(\boldsymbol{r}, t) e^{-i\omega t}$$

$$\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, \phi(\boldsymbol{r}, t) e^{-i\omega t}$$

である。(4)、(5) を (1) へ代入する。

$$\int \mathrm{d}\omega\, (\triangle + \varepsilon\mu\omega^2)\phi_\omega(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t} = -\frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{d}\omega\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}) e^{i\omega t}$$

$$\therefore \qquad (\triangle + \varepsilon\mu\omega^2)\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_\omega(\boldsymbol{r})$$

よって

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_\omega(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

step2. $\phi_\omega(\boldsymbol{r})$ を点電荷分布の重ね合わせで決まると考える。

$$\phi_\omega(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3 r'\, \phi_{\omega\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho_\omega(\boldsymbol{r}') \tag{7}$$

$\phi_{\omega\delta}$ は $\rho_\omega(\boldsymbol{r})$ の重みである (Green 関数)。さらに恒等式

$$\rho_\omega(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}^3 r'\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}')\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{8}$$

を用いる。(7)、(8) を (6) に代入すると

$$\int \mathrm{d}^3 r'\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}')\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_{\omega\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{d}^3 r'\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}')\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

$$\therefore \qquad \left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_{\omega\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{9}$$

$\omega^2/c^2 = k^2$ である。(9) の解は以下のようになる。

$$\phi_{\omega\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{\pm ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{10}$$

極座標系における Laplacian を使い、$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ のとき 0、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ のとき ∞ になることを確かめる。

cf. Laplace 方程式の Green 関数

$$\begin{aligned} \triangle G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= -\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{aligned}$$

step3. $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ の表式 (5) に代入する。

$$\begin{aligned} \phi &= \int \mathrm{d}\omega\, \phi_\omega e^{i\omega t} \\ &= \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3r'\, \phi_{\omega\delta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho_\omega(\boldsymbol{r}')e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3r'\, \rho_\omega(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp\left[i\omega\left(t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

この式に $\rho_\omega(\boldsymbol{r}') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}t\, \rho(\boldsymbol{r}', t)e^{-i\omega t}$ を代入すると

$$= \frac{1}{8\pi^2\varepsilon}\int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t'\, \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp\left[i\omega\left(t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - t'\right)\right].$$

delta 関数の定義

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega(t-t')}$$

を用いると、ω で積分することで

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t'\, \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\delta(t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - t') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{aligned}$$

最後は t' の積分を行い δ 関数を消去した。

cf. 静電場

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

同様に vector potential $\boldsymbol{A}$ についても

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}', t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

となる。4 元表記では

$$A^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\, \frac{j^\mu(\boldsymbol{r}', t \pm \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

ここで + を先進ポテンシャル、− を遅延ポテンシャルという。先進ポテンシャルは原因より結果が時間的に先になってしまう。

遅延ポテンシャルは Lorentz 条件を満たす。電荷の保存

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=0$$

を用いて示す。

2. 動いている点電荷による電磁場 (Lienard-Wiechert Potential)

点電荷 q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_q(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_q(t)=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_q(t)/\mathrm{d}t$ と表すと、これによる電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ 次式で表される。

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=q\boldsymbol{v}_q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q). \tag{2}$$

これらを遅延スカラーポテンシャル

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t'')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int\mathrm{d}t''\,\delta(t-t''-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}^3r'\int\mathrm{d}t''\,\frac{\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_q(t''))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(t-t''-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\mathrm{d}t''\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'')|}\delta(t-t''-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}).\end{aligned}$$

ただし、1 行目では δ 関数が挿入されている。次に t'' 積分を行うが

$$\delta(f(t''))=\frac{\delta(t''-t')}{\left|\frac{\mathrm{d}f(t')}{\mathrm{d}t'}\right|}$$

の性質を用いる (ただし t' は $f(t)=0$ の解である)。ここで $\boldsymbol{R}(t'')\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t'')$、$R\equiv|\boldsymbol{R}|$ とおくと

$$f(t'')=t-t''-\frac{R(t'')}{c}$$

であり、その微分は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(t'')}{\mathrm{d}t''}&=-1-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}R(t'')}{\mathrm{d}t''}\\&=-1-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\boldsymbol{r}_q}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_q(t'')}{\mathrm{d}t''}\\&=-1-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{v}_q(t'')\\&=-1+\frac{1}{cR(t'')}\boldsymbol{R}(t'')\cdot\boldsymbol{v}_q(t'')\end{aligned}$$

となる。なお、$|\boldsymbol{v}_q| < c$ より

$$\frac{\mathrm{d}f(t')}{\mathrm{d}t'} = 1 - \frac{1}{cR(t')}\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{v}_q(t')$$

となる。これらを用いて遅延ポテンシャル (6) を表すと次式を得る。

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}t''\,\frac{1}{R(t'')}\frac{\delta(t''-t')}{\left(1-\frac{1}{cR(t')}\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{v}_q(t')\right)} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R(t')-\frac{1}{c}\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{v}_q(t')}\end{aligned} \tag{8}$$

ここで t' は $t'-t+R(t')/c=0$ の解を表していることに注意しよう。同様に遅延ベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{9}$$

から

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{v}_q(t')}{R(t')-\frac{1}{c}\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{v}_q(t')} \tag{10}$$

が得られる。(8)、(10) をリエナール・ヴィーヒェルト (Lienard-Wiechert) ポテンシャル (LW potential) と呼ぶ。

(8)、(10) の表式から、点電荷が観測者に近づいていくる ($\boldsymbol{v}_q$ が $\boldsymbol{R}$ 方向の成分を持つ) 場合は、観測点 $(\boldsymbol{r},t)$ では静止している電荷 q よりも大きな電荷の存在を感じ、遠ざかっている ($\boldsymbol{v}_q$ が $-\boldsymbol{R}$ 方向の成分を持つ) 場合は、観測点 $(\boldsymbol{r},t)$ では静止している電荷 q よりも小さな電荷の存在を感じることが分かる。

(8)、(10) を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

に代入すれば、次式で表される動いている点電荷による電場と磁場が求まる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_q^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}-\frac{R\boldsymbol{v}_q}{c}\right) + \frac{1}{c^2s^3}\boldsymbol{R}\times\left\{\left(\boldsymbol{R}-\frac{R\boldsymbol{v}_q}{c}\right)\times\frac{\partial\boldsymbol{v}_q}{\partial t'}\right\}\right] \tag{13}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{c^2s^3}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_q^2}{c^2}\right)(\boldsymbol{v}_q\times\boldsymbol{R}) + \frac{1}{c^3s^3}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\times\boldsymbol{R}\times\left\{\left(\boldsymbol{R}-\frac{R\boldsymbol{v}_q}{c}\right)\times\frac{\partial\boldsymbol{v}_q}{\partial t'}\right\}\right] \tag{14}$$

ここで $s \equiv R - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}/c$ である。なお、(13)、(14) から直交関係

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{Rc}\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E} \tag{15}$$

を確かめることができる。

(13)、(14) において $[\cdots]$ の中の第 1 項は $1/s^2(\sim 1/R^2)$ に比例するクーロン場であり、第 2 項は $1/s(\sim 1/R)$ に比例し遠方まで到達可能な電磁波を表す。この電磁波の項は、荷電粒子の加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_q/\mathrm{d}t'$ に比例することに注意しよう。すなわち電磁波を放出できるのは加速度運動する荷電粒子のみであり、等速度運動する粒子は電磁波を放射しないことが分かる。

次に荷電粒子の加速度運動によって放射される電磁波のエネルギーを求める。まず時間 $\mathrm{d}t$ の間に立体角要素 $\mathrm{d}\Omega$ 中に放射される電磁波のエネルギーは次式で表される。

$$\mathrm{d}U = \left(\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}\right)R^2\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

ここで $\boldsymbol{S}$ はポインティングベクトル $\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{B}/\mu_0)$ であり、(15) を使って

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0 R c}\boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{E}) = \frac{|\boldsymbol{E}|^2}{\mu_0 c}\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

と表される。よって (16) は

$$\mathrm{d}U = \frac{|\boldsymbol{E}|^2}{\mu_0 c} R^2 \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t$$

となり、単位時間あたりの輻射エネルギー

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t'} = \frac{|\boldsymbol{E}|^2}{\mu_0 c} R^2 \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{|\boldsymbol{E}|^2}{\mu_0 c} sR\mathrm{d}\Omega$$

や、輻射角度分布

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{|\boldsymbol{E}|^2}{\mu_0 c} sR$$

が求まることになる。ここで十分遠方 $(1/R^2 \to 0)$ を考えると、(13) の電磁波成分のみを考慮して

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2 R}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 s^5}\left|\boldsymbol{R} \times \left\{\left(\boldsymbol{R} - \frac{R\boldsymbol{v}_q}{c}\right) \times \frac{\partial \boldsymbol{v}_q}{\partial t'}\right\}\right|^2$$

が得られる。

最後に 2 つの特徴的な加速度運動をする荷電粒子の出す電磁波の角度分布を与えておく。角度 θ は $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{v}_q$ との成す角度である。

制動輻射　速度 $\boldsymbol{v}_q$ と反対方向の加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}_q$ による減速運動

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2|\dot{\boldsymbol{v}}_q|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v_q}{c}\right)^5}.$$

サイクロトロン輻射　半径 a、角振動数 ω $(v_q \ll c)$ の円運動 $(\boldsymbol{v}_q \perp \dot{\boldsymbol{v}}_q)$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(1 + \cos^2\theta\right).$$